Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
19/12/2012.
Durée 3h

EXAMEN - session **1**
ANALYSE 3

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours/applications. (7,5 points=3+4,5)

1) Longueur d'une courbe de classe $\mathcal{C}^1$.

(i) Définition

(ii) Exprimer la longueur en fonction d'une intégrale.

(iii) Calculer la longueur de l'arc de cycloïde

$$\vec{\gamma} \left| \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \big(t-\sin(t), 1-\cos(t)\big) \end{array} \right.$$

2) a) Énoncer le théorème de Heine.

b) On souhaite le démontrer comme en cours : soit f une fonction continue sur K.

(i) Écrire la négation de la conclusion et justifier l'existence de $\varepsilon_0 > 0$ et de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \|a_n - b_n\| \leqslant 1/(n+1) \quad \text{et} \quad \|f(a_n) - f(b_n)\| \geqslant \varepsilon_0.$$

(ii) Justifier l'existence d'une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que les suites $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

(iii) Conclure.

c) Une autre preuve.

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier que pour tout $x \in K$, il existe $\delta_x > 0$ tel que :

$$\forall\, y \in K \cap \overset{\circ}{B}\big(x, \delta_x\big) \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon/2.$$

(ii) Justifier qu'il existe $x_1, \ldots, x_p \in K$ tel que $K \subset \displaystyle\bigcup_{1\leqslant i\leqslant p} \overset{\circ}{B}\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$

(iii) Conclure.

<u>**Exercice 1.**</u> (3 points)

Soit $d \geqslant 1$ un entier. On note (comme d'habitude) $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré au plus d.

1) Montrer que $\|P\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |P(t)|$ définit bien une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.

2) Montrer qu'il existe $C_d \geqslant 0$ tel que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$:

$$\|P'\| \leqslant C_d \|P\|.$$

Indication : on pourra considérer l'application $P \mapsto P'$

Exercice 2. (4 points=1+1+1+0,5+0,5)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ (muni d'une norme $\|\cdot\|$) à la fois ouverte et fermée dans $\mathbb{R}^n$ (où $n \geqslant 1$ est un entier). Soit $a \in A$. On suppose qu'il existe $\beta \notin A$.

a) Montrer que l'application $t \in \mathbb{R} \longmapsto (1-t)a + t\beta$ est lipschitzienne.

b) Soit $K = \{t \in [0,1] \mid (1-t)a + t\beta \in A\}$. Montrer qu'il existe une partie U de $\mathbb{R}$ ouverte et fermée telle que $K = U \cap [0,1]$.

c) Justifier que K est compact et l'existence de $t_0 = \max K$.

d) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $t_0 + r \in K$.

e) Conclure.

Exercice 3. (4 points)

Étudier et tracer la courbe paramétrée $\gamma = (x, y)$ avec $\begin{cases} x(t) &= \mathrm{e}^{t-1} - t \\ y(t) &= t^3 - 3t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

On prêtera une attention particulière au point de paramètre $t = 1$.

Exercice 4. (7,5 points=0,5+(0,5+1+2)+(0,5+0,5+1+1,5))

1) Démontrer que $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |xy| \leqslant x^2 - xy + y^2$.

2) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \quad f(0,0) = 0$$

où p et q sont des entiers positifs non nuls.

a) Justifier que f est effectivement bien définie sur $\mathbb{R}^2$ et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

c) (i) Montrer que f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. On précisera leurs valeurs.

(ii) Si f est différentiable en $(0,0)$, que vaut nécessairement la différentielle de f en $(0,0)$ (que l'on notera df_O) ?

On suppose désormais que $p + q \geqslant 3$.

d) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\quad \big|f(x,y)\big| \leqslant \|(x,y)\|_\infty^{p+q-2}$.

e) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

f) On suppose que $p + q \geqslant 4$. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.

g) On suppose que $p + q = 3$.

(i) Montrer f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ dans la direction $\vec{i} + \vec{j}$. Que vaut-elle ?

(ii) f est-elle différentiable en $(0,0)$?