Licence de Mathématiques 2012-2013.
Université d'Artois. P. Lefèvre.

EXAMEN - session **1**
ANALYSE 3
Éléments de correction

Cours/applications.

1) a) et b) cf. cours.
c) Il s'agit bien d'un arc de classe $\mathcal{C}^1$ et sa longueur est

$$L(\vec{\gamma}) = \int_0^{2\pi} \Big((1-\cos(t))^2 + (\sin(t))^2\Big)^{1/2}\,dt = \int_0^{2\pi}\Big(2-2\cos(t)\Big)^{1/2}\,dt$$

donc, puisque $1-\cos(t) = 2\sin^2(t/2)$, on obtient

$$L(\vec{\gamma}) = 2\int_0^{2\pi} |\sin(t/2)|\,dt = 4\int_0^{\pi} |\sin(x)|\,dx = 4\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx = 8.$$

2) a) et b) cf cours.

c) (i) Il s'agit simplement d'exprimer la continuité de f en tout point x de K (en prenant $\varepsilon/2$ au lieu de ε dans la définition).

(ii) Puisque $K \subset \bigcup_{x\in K} \overset{\circ}{B}\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$ de façon évidente : tout $x \in K$ est trivialement dans la boule $\overset{\circ}{B}\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$, le théorème de Borel-Lebesgue donne l'existence d'un nombre fini de telles boules, suffisantes pour recouvrir K : il existe $x_1, \ldots, x_p \in K$ tel que

$$K \subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant p} \overset{\circ}{B}\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right).$$

(iii) Choisissons $\eta = \min\big(\delta_{x_1}/2, \ldots, \delta_{x_p}/2\big) > 0$. Considérons x et x' dans K tels que $\|x-x'\| < \eta$: il existe i compris entre 1 et p tel que $x \in \overset{\circ}{B}\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$ d'après la question précédente. Comme

$$\|x_i - x'\| \leqslant \|x_i - x\| + \|x-x'\| < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \eta \leqslant \delta_{x_i}$$

x' appartient aussi à $\overset{\circ}{B}\left(x_i, \delta_{x_i}\right)$.

Ainsi
$$\|f(x) - f(x')\| \leqslant \|f(x) - f(x_i)\| + \|f(x_i) - f(x')\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Conlusion f est bien uniformément continue.

Exercice 1.

1) L'inégalité triangulaire et l'homogénéité ne posent pas de difficulté. Pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$, on a bien $\|P\| \geqslant 0$ et si $\|P\| = 0$ alors $P(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ donc P a une infinité de racines donc $P = 0$.

2) L'application Δ :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_d[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_d[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}\right.$$

est bien définie et linéaire. Comme $\mathbb{R}_d[X]$ est de dimension finie $(d+1)$, l'application Δ est continue. C'est une application linéaire continue donc il existe $C_d \geqslant 0$ tel que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$:

$$\|P'\| = \|\Delta(P)\| \leqslant C_d \|P\|.$$

Exercice 2.

On a $a \in A$ et $\beta \in \mathbb{R}^n \backslash A$.

a) L'application τ :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & (1-t)a + t\beta \end{array}\right.$$

vérifie, pour tous $t, s \in \mathbb{R}$:

$$\|\tau(t) - \tau(s)\| = \|(t-s)(\beta - a)\| = \|\beta - a\|.|t-s|$$

donc τ est $\|\beta - a\|$-lipschitzienne.

b) On note que $K = \tau^{-1}(A) \cap [0,1]$.

Comme τ est continue et A est fermé, $\tau^{-1}(A)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$. Comme τ est continue et A est ouvert, $\tau^{-1}(A)$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$.

On a donc la conclusion avec $U = \tau^{-1}(A)$.

c) K est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$ donc c'est une partie compacte de $\mathbb{R}$. Le maximum de K est donc bien définie.

d) Comme $1 \notin K$ (puisque $\beta \in \mathbb{R}^n \backslash A$), on a $t_0 < 1$. D'autre part, $t_0 \in U$ qui est ouvert donc il existe $\delta > 0$ tel que $t_0 + d \in U$ pour tout $d \in [0, \delta]$. Ainsi $r = \min(\delta, 1 - t_0) > 0$ convient.

e) $t_0 + r > t_0$ ce qui contredit la définition de t_0. Conclusion, un tel β n'existe pas, ou encore toute partie A à la fois ouverte et fermée dans $\mathbb{R}^n$ est soit vide, soit $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3.

Étudier et tracer la courbe paramétrée $\gamma = (x, y)$ avec $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{t-1} - t \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

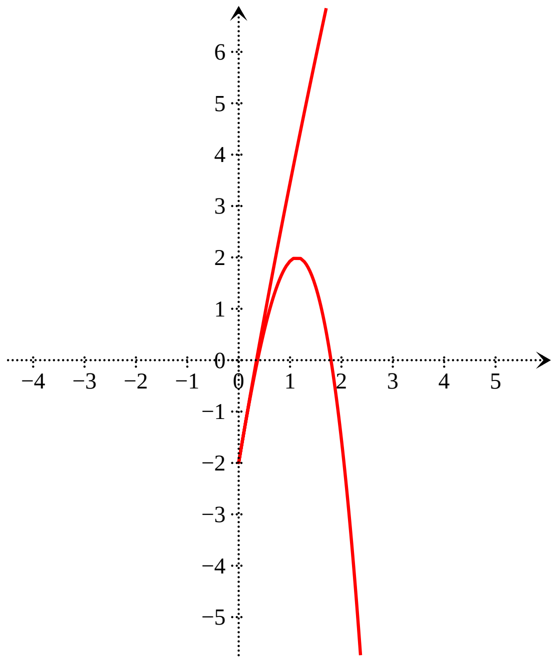
Pour $t \in \mathcal{D}$, on a $x'(t) = \mathrm{e}^{t-1} - 1$ et $y'(t) = 3\big(t^2 - 1\big)$ D'où le tableau de variation :

t	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
x'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	$1+\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le point associé à $t = 1$ est un point stationnaire. Après calculs (par ex DL au voisinage de 1 pour x) : $\gamma''(-1) = (1, 6)$, $\gamma^{(3)}(1) = (1, 6)$ et $\gamma^{(4)}(1) = (1, 0)$ donc $(p, q) = (2, 4)$ donc c'est un point de rebroussement de seconde espèce. En ce point la tangente est donc dirigée par le vecteur $(1, 6)$.

Pour les asymptotes : il y a deux directions asymptotiques d'axes (Oy) (quand $t \to -\infty$), et d'axes (Ox) (quand $t \to +\infty$) qui ne se voit pas bien ici sur le dessin (cela se voit bien plus loin sur l'axe des abscisses).

D'où la courbe :



Exercice 4.

1) Comme $\big(|x| - |y|\big)^2 \geqslant 0$, on a l'inégalité bien connue $2|xy| \leqslant x^2 + y^2$. Donc

$$|xy| + xy \leqslant 2|xy| \leqslant x^2 + y^2.$$

2) a) f est effectivement bien définie sur $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ puisque si $x^2 - xy + y^2$ s'annule alors x ou y est nul d'après la question précédente et donc (avec $x^2 - xy + y^2 = 0$) $x = y = 0$.

b) Un calcul évident donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(p-2)x^{p+1}y^q - (p-1)x^p y^{q+1} + p x^{p-1} y^{q+2}}{\big(x^2 - xy + y^2\big)^2}$$

et (en permutant x et y et p et q)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(q-2)x^p y^{q+1} - (q-1)x^{p+1} y^q + q x^{p+2} y^{q-1}}{\big(x^2 - xy + y^2\big)^2}$$

c) (i) Comme pour tout réel t, on a $f(t, 0) = 0$, qui est dérivable en 0, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(ii) Dès lors, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a $df_O(h,k) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0).h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0).k = 0$ donc df_O est nulle.

d) D'après la question 1., on a pour tout x, y non nuls

$$\left|f(x,y)\right| \leqslant \frac{|x|^p |y|^q}{|xy|} = |x|^{p-1} |y|^{q-1} \leqslant \|(x,y)\|_\infty^{p+q-2}$$

car $p-1$ et $q-1$ sont des entiers positifs.

La même inégalité est trivialement vraie si x ou y est nul.

e) Lorsque $\|(x,y)\|_\infty$ tend vers 0, $\left|f(x,y)\right|$ tend vers 0. Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, avec $\delta = \varepsilon^{1/(p+q-2)} > 0$, on a pour tout (x,y) tel que$\|(x,y)\|_\infty \leqslant \delta$, alors

$$\left|f(x,y) - f(0,0)\right| = \left|f(x,y)\right| \leqslant \varepsilon$$

donc f est continue en 0. On savait déjà que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

f) Dans ce cas, $f(x,y)$ est $o\Big(\|(x,y)\|_\infty\Big)$ au voisinage de $(0,0)$. Cela exprime que f est différentiable et que sa différentielle est nulle en $(0,0)$.

g) On note $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$. Pour tout réel t non nul, on a $f\big((0,0) + t\vec{v}\big) = t$, qui est dérivable en 0 de dérivée égale à 1. Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 1.$$

Si f était différentiable en $(0,0)$, on devrait avoir à la fois

$$1 = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = df_O(\vec{v})$$

et d'après 2.b.ii :

$$df_O(\vec{v}) = 0$$

C'est contradictoire. Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.