Université d'Artois. UFR Sciences **2010/2011**
Licence Mathématiques 3.
Calcul différentiel 2

Examen session 1

Cours - Applications (5 points=1+(1+1+2))

1) Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz global.

2) Dans toute cette question, on considère des courbes γ birégulières de classe C^2

a) Rappeler la définition de l'abscisse curviligne σ et du rayon de courbure R.

b) Donner la relation qui relie R, σ et φ (l'angle entre $\vec{i}$ et le vecteur tangent $\vec{T}$).

c) Déterminer les courbes γ telles que $R = 1 + \sigma^2$.

Exercice 1 (3 points=1+2)
On pose $I = \left] -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right[$. Pour $t \in I$, montrer qu'il existe une unique solution à l'équation

$$\sin(tx) + \cos(tx) = x.$$

On la note $\varphi(t)$.
Montrer que $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 2 (3 points)
Résoudre l'équation différentielle $\quad y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \cdot \mathrm{e}^{2t} \quad$ où $\quad t \in \mathbb{R}^{*+}$.

Exercice 3 (3 points)
Résoudre l'équation différentielle $\quad y'(t) + \dfrac{2}{t} y(t) = \dfrac{1}{t\sqrt{y(t)}} \cdot \mathrm{e}^t \quad$ où $\quad t \in \mathbb{R}^{*+}$.

Exercice 4 (3,5 points=2+1,5)
On veut résoudre l'équation différentielle $\quad xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 0 \quad$ où $\quad x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe une solution développable en série entière (que l'on déterminera), *différente de la fonction nulle.*

b) Déterminer toutes les solutions.

Exercice 5 (2,5 points=1+0,5+1)
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+xy} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer qu'il admet une unique solution maximale φ.

2) Montrer que φ est croissante.

3) Etablir que φ est définie sur tout $\mathbb{R}$.