Université d'Artois. UFR Sciences **2010/2011**
Licence Mathématiques 3.
Calcul différentiel 2

Examen session 1: éléments de correction.

Cours - Applications
On a $R = \sigma'(\varphi)$.

L'équation $R = 1 + \sigma^2$ s'écrit donc $\dfrac{\sigma'(\varphi)}{1+\sigma^2} = 1$. Comme la fonction $t \to 1 + t^2$ est C^1: il y a des solutions maximales définies sur un intervalle J.

$arctan\big(\sigma(\varphi)\big) = \varphi - \varphi_0$ où $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in J$. L'intervalle J est donc $\big]\varphi_0 - \pi/2, \varphi_0 + \pi/2\big[$

On a donc $\sigma(\varphi) = tan\big(\varphi - \varphi_0\big)$.

On sait, en choisissant φ comme paramètre, que $\vec{\gamma}'(\varphi) = \big(\sigma'(\varphi)\cos(\varphi), \sigma'(\varphi)\sin(\varphi)\big)$, puisque $\vec{T} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$.

Ainsi $x'(\varphi) = \dfrac{\cos(\varphi)}{\cos^2(\varphi - \varphi_0)}$ et $y'(\varphi) = \dfrac{\sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi - \varphi_0)}$ ou encore en choisissant $\theta = \varphi - \varphi_0$ comme paramètre (et en notant $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ les fonctions coordonnées après changement)

$$\tilde{x}'(\theta) = \frac{\cos(\theta + \varphi_0)}{\cos^2(\theta)} \qquad \text{et} \qquad \tilde{y}'(\theta) = \frac{\sin(\theta + \varphi_0)}{\cos^2(\theta)}$$

Il suffit de traiter le cas $\varphi_0 = 0$ et d'effectuer une rotation (d'angle φ_0) pour obtenir toutes les autres courbes solutions.

Ainsi:

$$\tilde{x}(\theta) = \ln\Big|\tan(\theta/2 + \pi/4)\Big| + x_0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{y}(\theta) = \ln\Big|\cos(\theta)\Big| + y_0.$$

Exercice 1 Traité en cours/TD.

Exercice 2 L'équation différentielle $\quad y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \cdot \mathrm{e}^{2t} \quad$ où $\quad t \in \mathbb{R}^{*+}$ est une équation linéaire: nous allons d'abord résoudre l'équation homogène associée:

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$$

Clairement 2 est racine double de l'équation caractéristique donc $y(t) = (at + b) \cdot \mathrm{e}^{2t}$ en sont les solutions générales $(a, b \in \mathbb{R})$.

Appliquons la méthode de variation des constantes à l'ordre 2: on cherche des solutions ous la forme $y(t) = a(t).t.\mathrm{e}^{2t} + b(t).\mathrm{e}^{2t}$. Cela nous donne le système

- $a'(t).t.\mathrm{e}^{2t} + b'(t).\mathrm{e}^{2t} = 0$

et

- $a'(t)(1 + 2t)\mathrm{e}^{2t} + 2b'(t).\mathrm{e}^{2t} = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \cdot \mathrm{e}^{2t}$

Soit

- $a'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donc $a(t) = 2\sqrt{t} + a_0$.

et

- $b'(t) = -\sqrt{t}$ donc $b(t) = -\dfrac{2}{3}t^{3/2} + b_0$.

Finalement, la solution générale cherchée est $y(t) = \frac{4}{3}t^{3/2}.\mathrm{e}^{2t}+(a_0t+b_0)\mathrm{e}^{2t}$, où $t \in \mathbb{R}^{*+}$, avec $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 L'équation différentielle $y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = \frac{1}{t\sqrt{y(t)}} \cdot \mathrm{e}^t$ où $t \in \mathbb{R}^{*+}$ est une équation de Bernoulli: on suit donc la procédure habituelle en considérant $Z(t) = y^{3/2}(t)$ pour les valeurs de t où $y(t) > 0$.

L'équation devient

$$\frac{2}{3}Z'(t) + \frac{2}{t}Z(t) = \frac{1}{t} \cdot \mathrm{e}^t.$$

On résout d'abord l'équation homogène associée et on trouve $Z(t) = K/t^3$. On applique alors la méthode de variation des constantes en cherchant des solutions sous la forme $Z(t) = K(t)/t^3$, ce qui conduit à

$$K'(t) = \frac{3}{2}t^2\mathrm{e}^t \qquad \text{donc} \qquad K(t) = \Big(\frac{3}{2}t^2 - 3t + 3\Big)\mathrm{e}^t + k$$

où $k \in \mathbb{R}$.

Ainsi , les solutions générales sont de la forme

$$y(t) = \frac{\left(\Big(\frac{3}{2}t^2 - 3t + 3\Big)\mathrm{e}^t + k\right)^{2/3}}{t^2}$$

où $k \in \mathbb{R}$ et t est dans un intervalle $J \subset \mathbb{R}^{*+}$ tel que $\Big(\frac{3}{2}t^2 - 3t + 3\Big)\mathrm{e}^t + k > 0$ sur J.

Exercice 4 1. On voit immédiatement sur $\mathbb{R}^{*+}$: l'ensemble des solutions a une structure d'espace vectoriel de dimension 2 (équation linéaire homogène). Idem sur $\mathbb{R}^{*-}$.

On suppose qu'il existe des solutions sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, qui seraient alors solutions sur un intervalle $]-R, R[$ (éventuellement, $\mathbb{R}$), où R est le rayon de convergence de la série entière. On va déterminer les candidats possibles.

On a pour tout $x \in]-R, R[$

- $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = a_1 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1}$.
- $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$

Donc l'équation s'écrit $a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \big((n+3)(n+2)a_{n+2} + a_n\big)x^{n+1} = 0$.

On en déduit que $a_1 = 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+2} = \frac{-1}{(n+3)(n+2)}a_n$. Ainsi

- Pour tout entier n impair, $a_n = 0$.
- pour tout $k \in N$, on a $a_{2k+2} = \frac{-1}{(2k+3)(2k+2)}a_{2k}$ et donc $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_0$.

On en conclut que

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k} = \frac{a_0}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = a_0\frac{\sin(x)}{x}.$$

La fonction $\sigma : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est bien développable en série entière avec rayon de convergence infini. De plus, on vérifie facilement qu'elle est solution de l'équation différentielle.

2. Notre équation différentielle est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 donc on connaît une solution non triviale: σ. On considère donc les fonctions z telle que $y(x) = z(x)\sigma(x)$: autrement dit la fonction $z(x) = y(x)/\sigma(x)$ sur les intervalles où y est solution et σ ne s'annule pas.

Cela nous conduit à une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 en z' (on simplifie par $x = 0$ au passage donc on raisonne en plus pour $x \neq 0$):

$$\sin(x).z''(x) + 2\cos(x).z'(x) = 0$$

donc on a

$$z'(x) = \frac{\lambda}{\sin^2(x)} \qquad \text{donc} \qquad z(x) = a + \lambda cotan(x) = a + \lambda\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\cdot$$

où $a, \lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi $y(x) = a\dfrac{\sin(x)}{x} + \lambda\dfrac{\cos(x)}{x}\cdot$ (a priori sur des intervalles où sin ne s'annule pas).

Les fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x}$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et on voit qu'elles sont solutions de notre équation différentielle. Elles sont indépendantes: sur chaque intervalle $\mathbb{R}^{*+}$ et $\mathbb{R}^{*-}$ (à considérer séparément), elles forment donc une base de l'espace des solutions de l'équation.

Les seules solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto a\dfrac{\sin(x)}{x}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 Traité en cours/TD.