Université d'Artois. UFR Sciences **2010/2011**
Licence Mathématiques 3.
Calcul différentiel 2

Examen session 2

Cours - Applications (5,5 points=(1+3)+(0,5+0,5+0,5))

1) a) Rappeler la définition de l'abscisse curviligne σ d'une courbe paramétrée (birégulières de classe C^2) et la relation qui relie le rayon de courbure R, σ et φ, l'angle entre $\vec{i}$ et $\vec{T}$ (le vecteur tangent).

b) Déterminer les courbes telles que $R = 1 + \sigma^2$.

2) Soient $u_1, \dots, u_n$ des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre $n \geq 1$.

a) Quelle est la structure algébrique de l'ensemble des solutions ?

b) Quelle est la définition du Wronskien associé à $(u_1, \dots, u_n)$?

c) À quelle condition (nécessaire et suffisante) est-ce que ce wronskien est non nul ?

Exercice 1 (3 points=1,5+1,5)

Soit p une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |p(t)|\, dt$ converge (i.e. $p \in L^1(\mathbb{R}^+, dt)$ où dt est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$).

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(t) - p(t)y(t) = 0 \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}^+$$

1) On considère $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une solution bornée de l'équation (E).
Montrer que φ' a une limite en $+\infty$ puis justifier que cette limite est nécessairement nulle.

2) Prouver qu'il existe une solution non bornée de (E) (*Indication: on pourra utiliser le wronskien*).

Exercice 2 (5,5 points=1+1+3,5)

On veut résoudre l'équation différentielle:

$$(E) \qquad (1+t^4)y'(t) = 2ty^2(t) - 4ty(t) + 4t \qquad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1) Trouver une solution particulière. (*Indication: on pourra chercher une solution polynômiale*)

2) Expliquer comment résoudre (E) se ramène à résoudre l'équation

$$(\tilde{E}) \qquad (1+t^4)z'(t) = 2tz^2(t) + 4t^3.z(t)$$

3) Résoudre $(\tilde{E})$ et en déduire les solutions de (E).

Exercice 3 (4,5 points=2+2,5)

On veut résoudre l'équation différentielle:

$$(E) \qquad t^2y''(t) - 3ty'(t) + 4y(t) = t^2\ln(t) \qquad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}^{*+}.$$

1) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E) $\big($on pourra considérer $x \mapsto y\big(\mathrm{e}^x\big)\big)$

2) Résoudre l'équation différentielle (E).

Exercice 4 (2 points=1+1)

1) Énoncer le théorème des fonctions implicites.

2) Montrer que l'équation $f(x,y,z) = ln\big(1+y-z\big) - x - z = 0$ définit au voisinage de $(0,0)$ une fonction implicite $(x,y) \mapsto z = \varphi(x,y)$ telle que $\varphi(0,0) = 0$.