

Examen session 2: éléments de correction.

Cours - Applications

Cf cours et corrigé session 1.

Exercice 1

Cf cours.

Exercice 2 (E) $(1 + t^4)y'(t) = 2ty^2(t) - 4ty(t) + 4t$ où $t \in \mathbb{R}$.

C'est une équation de Riccati.

1) Clairement, il n'y a pas de solution constante a (a devrait être solution de $2a^2 - 4a + 4 = 0$). On cherche une solution polynomiale de degré $n \geq 1$: avec $a_n \neq 0$ le coefficient dominant, on observe que: na_nt^{n+3} est le terme dominant de $(1 + t^4)y'(t)$ et $2a_nt^{2n+1}$ celui du second membre. Ainsi, on doit nécessairement avoir $n + 3 = 2n + 1$ donc $n = 2$. On cherche ainsi une solution particulière $y(t) = at^2 + bt + c$. Pour simplifier, on peut constater que $y'(0) = 0$, ce qui impose $b = 0$ (mais ce n'est pas nécessaire pour identifier a, b, c). En injectant dans (E), on trouve $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$. Conclusion $y_0(t) = t^2 + 1$ est une solution particulière.

2) On suit la méthode résolution des équations de Riccati: on cherche les fonctions z telle que $y(t) = (t^2 + 1) + z(t)$ est solution de (E). En injectant dans (E) et en tenant compte que $t \mapsto t^2 + 1$ est solution, cela donne ($\tilde{E}$). Si z est solution de ($\tilde{E}$) alors $y(t) = (t^2 + 1) + z(t)$ est solution de (E). Réciproquement, si y est solution de (E), alors $z(t) = y(t) - (t^2 + 1)$ est solution de ($\tilde{E}$).

3) ($\tilde{E}$) est une équation de Bernoulli. Donc on considère la fonction $u(t) = 1/z(t)$ sur les intervalles où z ne s'annule pas et z est solution de ($\tilde{E}$).

On doit donc résoudre: $(1 + t^4)u'(t) + 4t^3u(t) = -2t$. L'équation homogène: $(1 + t^4)u'(t) + 4t^3u(t) = 0$ a pour solution $t \mapsto \frac{K}{1 + t^4}$. Puis la méthode de variation des constantes donne $K'(t) = -2t$ donc

$K(t) = -t^2 + k$ (où $k \in \mathbb{R}$) i.e. les solutions générales sont $u(t) = \frac{-t^2 + k}{1 + t^4}$, où $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi, les solutions de ($\tilde{E}$) sont la fonction nulle et les fonctions $t \mapsto \frac{1 + t^4}{k - t^2}$ sur les intervalles inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{k}\}$ quand $k \geq 0$ et sur $\mathbb{R}$ quand $k < 0$.

Finalement, les solutions (maximales) de (E) sont y_0 et les fonctions $t \mapsto \frac{(1 + t^4)}{k - t^2} + (1 + t^2)$ sur les intervalles (maximaux) inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{k}\}$ quand $k \geq 0$ et sur $\mathbb{R}$ quand $k < 0$.

Exercice 3 (E) $t^2y''(t) - 3ty'(t) + 4y(t) = t^2 \ln(t)$ où $t \in \mathbb{R}^{*+}$.

1) L'équation homogène associée est (H) $t^2y''(t) - 3ty'(t) + 4y(t) = t^2 \ln(t)$ où $t \in \mathbb{R}^{*+}$.

Il s'agit d'une équation d'Euler. On suit l'indication de l'énoncé (cf cours aussi). Si y est une solution on cherche de quelle équation différentielle ($\tilde{H}$) est solution $z(x) = y(e^x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement toute fonction z solution de ($\tilde{H}$) déterminera une fonction $y(t) = z(\ln(t))$ où $t > 0$.

Pour $t > 0$, on a $y'(t) = \frac{1}{t}z'(\ln(t))$ et $y''(t) = \frac{-1}{t^2}z'(\ln(t)) + \frac{1}{t^2}z''(\ln(t))$. Ainsi, l'équation différentielle ($\tilde{H}$) est

$$z''(x) - 4z'(x) + 4z(x) = 0 \quad \text{où } x \in \mathbb{R}.$$

Les solutions générales sont $z(x) = (ax + b)e^{2x}$ puisque 2 est racine double de l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$.

Cela donne donc les solutions générales de (H): ce sont les fonctions $y(t) = (a \ln(t) + b)t^2$ pour $t > 0$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

2) On suit par exemple la méthode de variation des constantes et on cherche des solutions sous la forme $y(t) = a(t) \cdot \ln(t) \cdot t^2 + b(t) \cdot t^2$. On résout donc le système:

- $a'(t) \cdot \ln(t) \cdot t^2 + b'(t) \cdot t^2 = 0$

et

- $a'(t) [2t \cdot \ln(t) + t] + 2tb'(t) = \ln(t)$

Ce qui donne $a'(t) = \frac{1}{t} \ln(t)$ et $b'(t) = -\frac{1}{t} \ln^2(t)$. Donc $a(t) = \frac{1}{2} \ln^2(t) + \alpha$ et $b(t) = -\frac{1}{3} \ln^3(t) + \beta$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

On obtient finalement:

$$y(t) = \frac{1}{6} t^2 \ln^3(t) + (\alpha \ln(t) + \beta) t^2.$$

Exercice 4

1) Cf cours.

2) La fonction f est de classe C^∞ sur l'ouvert de $\mathbb{R}^3$: $\Omega = \{(x, y, z) \mid 1 + y - z \neq 0\}$, qui est le complémentaire du fermé $\{(x, y, z) \mid 1 = z - y\}$ (c'est un plan). On a $f(0, 0, 0) = 0$. De plus

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) = -2 \neq 0$$

Le théorème des fonctions implicites s'applique et il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, voisinage de $(0, 0)$, un ouvert $V \subset \mathbb{R}$, voisinage de 0 et une fonction φ de classe C^∞ de U dans V telle que

$$\forall (x, y) \in U, \forall z \in V, \quad \text{on a} \quad f(x, y, z) = 0 \iff z = \varphi(x, y).$$