Université d'Artois. UFR Sciences **2011/2012**
Licence Mathématiques 3.
Calcul différentiel 2

Examen session 1

Cours - Applications (4,5 points=2+(1+1,5))

1) On considère l'arc (c'est une épicycloïde) :

$$\theta \in [0, 2\pi] \longmapsto \gamma(\theta) = \Big(\cos(\theta) - \frac{\cos(3\theta)}{3}\,, \sin(\theta) - \frac{\sin(3\theta)}{3}\Big).$$

Justifier que cet arc est rectifiable et calculer sa longueur.

2) a) Énoncer le théorème des fonctions implicites.

b) On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = \big(x^3 - y^2 + z^2, xyz - 1\big)$. On fixe $\big(x_0, y_0, z_0\big) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f\big(x_0, y_0, z_0\big) = (0,0)$.

Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I_0 contenant x_0 et une fonction $\varphi : I_0 \to \mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi(x_0) = \big(y_0, z_0\big)$ et $f\big(x, \varphi(x)\big) = 0$, pour tout $x \in I_0$.

Exercice 1 (3 points)

Résoudre l'équation différentielle $\qquad ty'(t) + y(t) - ty^3(t) = 0\,.$

Exercice 2 (4 points=2+2)

On veut résoudre l'équation différentielle:

$$(\mathcal{E}) \qquad x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = \ln(x) \qquad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}^{*+}.$$

1) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à $(\mathcal{E})$ $\big($on pourra considérer $t \mapsto y\big(\mathrm{e}^t\big)\big)$

2) Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.

Exercice 3 (5,5 points=1,5+(0,5+2,5+0,5+0,5))

1) On fixe des réels $a < b$ et $K \geq 0$.

Montrer la version suivante du lemme de Gronwall: soit $w : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant pour tout $x \in [a, b]$:

$$f(x) \leq K + \int_a^x w(t)f(t)\,dt.$$

Alors, pour tout $x \in [a, b]$:

$$f(x) \leq K \exp\Big(\int_a^x w(t)\,dt\Big).$$

Indication: adapter la preuve vue en cours.

2) Soit p une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |p(t)|\,dt$ converge. On considère $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation

$$(\mathcal{E}) \qquad y''(t) + y(t) - p(t)y(t) = 0 \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}^+$$

On veut montrer que φ est bornée.

a) Justifier que φ est une fonction de classe C^2 solution de $(\mathcal{E}_1)$: $y''(t) + y(t) = p(t)\varphi(t) \qquad$ où $t \in \mathbb{R}^+$

b) Résoudre l'équation $(\mathcal{E}_1)$.

c) En déduire que: $\exists\, c \in \mathbb{R}$, $\forall x \geq 0$, $\qquad |\varphi(x)| \leq c + \displaystyle\int_0^x |p(t)|.|\varphi(t)|\,dt.$

d) Conclure.

Exercice 4 (5 points=1,5+1,5+1+1)

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit $F(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(x+y) \\ \mathrm{e}^x - 1 \end{pmatrix}$.

On fixe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$(\mathcal{E}) \qquad X'(t) = F\big(X(t)\big) \qquad \text{et} \qquad X(0) = (x_0, y_0).$$

1) Montrer $(\mathcal{E})$ admet une unique solution maximale $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, définie sur un intervalle J dont on précisera la forme.

2) Montrer que pour tout $t \in J$, on a $\big|\varphi_1(t) - x_0\big| \leq |t|$ et $\big|\varphi_2(t) - y_0\big| \leq \Big(\mathrm{e}^{|x_0|}.\mathrm{e}^{|t|} + 1\Big)|t|$.

3) En déduire que $J = \mathbb{R}$.

4) Quels sont les points d'équilibre de $(\mathcal{E})$?