Université d'Artois. UFR Sciences **2011/2012**
Licence Mathématiques 3.
Calcul différentiel 2

Examen session 1: éléments de correction.

Cours - Applications

1) L'arc γ est $\mathcal{C}^1$ donc rectifiable (cf cours) et sa longueur vaut $L(\gamma) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \|\gamma'(\theta)\|\, d\theta$. Ainsi

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \Big((\sin(\theta) - \sin(3\theta))^2 + (\cos(\theta) - \cos(3\theta))^2 \Big)^{1/2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\Big(1 - \cos(2\theta)\Big)^{1/2} d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi} \big|\sin(\theta)\big|\, d\theta = 8.
\end{aligned}$$

2) a) cf cours.

b) La fonction f est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ (chaque fonction coordonnée est polynômiale). La jacobienne de l'application $(y,z) \mapsto f\big(x_0, y, z\big)$ en $\big(y_0, z_0\big)$ est

$$\begin{bmatrix} -2y_0 & 2z_0 \\ x_0 z_0 & x_0 y_0 \end{bmatrix}$$

donc le jacobien vaut $-2x_0\big(y_0^2 + z_0^2\big)$ et est donc non nul puisque x_0, y_0, z_0 sont non nuls (leur produit vaut 1 car l'ordonnée de $f\big(x_0, y_0, z_0\big)$ est nulle).

Le théorème des fonctions implicites s'applique: il existe un ouvert contenant x_0, qui contient donc un intervalle ouvert I_0 contenant x_0, un ouvert $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ contenant $\big(y_0, z_0\big)$ et une fonction $\varphi : I_0 \to \mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi(x_0) = \big(y_0, z_0\big)$ et , pour tout $x \in I_0$ et tout $(y,z) \in \Omega_0$:

$$f(x,y,z) = 0 \iff (y,z) = \varphi(x)$$

Ainsi $f\big(x, \varphi(x)\big) = 0$, pour tout $x \in I_0$.

Exercice 1

Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$. Si une solution y (sur I) s'annule en $t \in I$ alors d'après l'unicité dans Cauchy-Lipschitz (qui s'applique car $(t,y) \mapsto -t^{-1}y + y^3$ est $\mathcal{C}^1$): y est identiquement nulle sur I. La fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ est clairement solution.

On s'intéresse aux solutions non nulles sur un intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$. On notera donc que par continuité sur un intervalle, le signe de ces fonctions (qui ne s'annulent pas) sera constant.

On reconnait une équation de Bernoulli: on considère la fonction $z(t) = \dfrac{1}{y^2(t)}$ sur un intervalle I où y ne s'annule pas. L'équation s'écrit alors

$$z'(t) - 2\frac{1}{t}z(t) = -2$$

L'équation homogène a pour solution $z(t) = kt^2$.

Puis on peut soit utiliser la méthode de variation de la constante, ce qui donne $k'(t)t^2 = -2$ donc $k(t) = c + \dfrac{2}{t}$ donc $z(t) = ct^2 + 2t$, où $c \in \mathbb{R}$; soit on peut chercher une solution particulière polynômiale de $tz'(t) - 2z(t) = -2t$: le terme de plus haut degré $d \geq 1$ est en at^d et vérifie: $da - 2a = 0$ si $d \geq 2$ (en fait $a \neq 0$ impose $d = 2$) et $-a = -2$ si $d = 1$. Le cas $d = 1$ donne $t \mapsto 2t$ qui est bien solution mais continuer sur le cas $d = 2$ donnerait aussi une solution. On retrouve alors toutes solutions en ajoutant cette solution particulière aux solutions générales de l'équation homogène.

Ainsi, les solutions sont d'une part la fonction nulle et , à $c \in \mathbb{R}$ fixé:

$$t \in I \longmapsto \frac{1}{\sqrt{ct^2 + 2t}} \qquad \text{et} \qquad t \in I \longmapsto \frac{-1}{\sqrt{ct^2 + 2t}}$$

où I est un intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$ vérifiant pour tout $t \in I$, $ct^2 + 2t > 0$.

Les solutions maximales sont donc

- La fonction nulle (sur $\mathbb{R}$)
- Les fonctions $t \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2t}}$ et $t \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \dfrac{-1}{\sqrt{2t}}$
- Pour $c > 0$, $t \in]-\infty, -2/c[\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{ct^2 + 2t}}$ et $t \in]-\infty, -2/c[\longmapsto \dfrac{-1}{\sqrt{ct^2 + 2t}}$

  et $t \in]0, +\infty[\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{ct^2 + 2t}}$ et $t \in]0, +\infty[\longmapsto \dfrac{-1}{\sqrt{ct^2 + 2t}}$
- Pour $c < 0$, $t \in]0, -2/c[\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{ct^2 + 2t}}$ et $t \in]0, -2/c[\longmapsto \dfrac{-1}{\sqrt{ct^2 + 2t}}$

Enfin, la seule solution globale est la fonction nulle puisque les autres fonctions ont une limite infinie en 0 (à gauche ou à droite).

Exercice 2

1) On pose $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$. On a $z'(t) = \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t)$ et $z''(t) = \mathrm{e}^{2t} y''(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t)$. L'équation homogène s'écrit alors

$$z''(t) + 3z'(t) + 2z(t) = 0$$

qui a pour solution $z(t) = a\mathrm{e}^{-t} + b\mathrm{e}^{-2t}$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $y(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

2) La méthode de variation des constantes s'écrit ici

$$\frac{a'(x)}{x} + \frac{b'(x)}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{-a'(x)}{x^2} + \frac{-2b'(x)}{x^3} = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Ainsi $a'(x) = \ln(x)$ et $b'(x) = -x\ln(x)$. Donc $a(x) = \alpha + x\ln(x) - x$ et $b(x) = \beta - \dfrac{1}{2}x^2\ln(x) + \dfrac{x^2}{4}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Finalement les solutions sont $x \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{x^2} + \dfrac{1}{2}\ln(x) - \dfrac{3}{4}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

1) On considère la fonction $U(x) = K + \displaystyle\int_a^x w(t)f(t)\,dt$ qui est $\mathcal{C}^1$ et vérifie $U'(x) = w(x)f(x) \leq w(x)U(x)$ par hypothèse (puisque w positif). Ainsi la fonction $x \mapsto U(x)\exp\Big(-\displaystyle\int_a^x w(t)\,dt\Big)$ a une dérivée négative et est décroissante. Elle est donc inférieure à sa valeur en a qui vaut $U(a) = K$. D'où la conclusion.

2) a) La fonction φ est 2 fois dérivable et vérifie $\varphi'' = -\varphi + p.\varphi$ qui est une fonction continue donc φ est bien C^2. D'autre part, par hypothèse elle vérifie $\varphi'' + \varphi = p.\varphi$ donc est solution de $(\mathcal{E}_1)$.

b) L'équation homogène a pour solution $t \mapsto a\cos(t)+b\sin(t)$ et la méthode de variation des constantes s'écrit ici

$$a'(t)\cos(t) + b'(t)\sin(t) = 0 \quad \text{et} \quad -a'(t)\sin(t) + b'(t)\cos(t) = p(t).\varphi(t)$$

ce qui donne

$$a'(t) = -\sin(t).p(t).\varphi(t) \quad \text{et} \quad b'(t) = \cos(t).p(t).\varphi(t)$$

soit

$$a(x) = \alpha - \int_0^x p(t)\varphi(t)\sin(t)\,dt \quad \text{et} \quad b(x) = \beta + \int_0^x p(t)\varphi(t)\cos(t)\,dt$$

donc les solutions sont

$$x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + \int_0^x p(t)\varphi(t)\sin(x-t)\,dt$$

La fonction φ est donc de cette forme et on en déduit bien pour tout $x \geq 0$:

$$|\varphi(x)| \leq |\alpha| + |\beta| + \int_0^x |p(t)|.|\varphi(t)|\,dt.$$

c) On applique le lemme de Gronwall -version (1): pour tout $x \geq 0$: $|\varphi(x)| \leq c\exp\Big(\int_0^x |p(t)|\,dt\Big)$. Enfin puisque $\int_0^x |p(t)|\,dt \leq \int_0^\infty |p(t)|\,dt = I$, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

$$|\varphi(x)| \leq c\mathrm{e}^I$$

donc φ est bornée.

Exercice 4

1) Il s'agit d'un système autonome et la fonction $\vec{y} \mapsto F(\vec{y})$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On peut aussi dire (en oubliant le caractère autonome) que la fonction $(t,\vec{y}) \mapsto F(\vec{y})$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$.

Donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique: il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy: (φ, J) où J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant 0. Ainsi J est de la forme $]-T^-, T^+[$ avec $T^-, T^+ > 0$.

2) Par hypothèse, pour tout $t \in J$, on a $\varphi_1'(t) = \sin\Big(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)\Big)$ donc $\big|\varphi_1'(t)\big| \leq 1$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on obtient

$$\big|\varphi_1(t) - x_0\big| = \big|\varphi_1(t) - \varphi_1(0)\big| \leq |t|.$$

On a alors $\big|\varphi_2'(t)\big| = \big|\exp(\varphi_1(t)) - 1\big| \leq 1 + \mathrm{e}^{|x_0|+|t|}$ donc avec l'inégalité des accroissements finis, on obtient aussi $\big|\varphi_2(t) - y_0\big| \leq \Big(\mathrm{e}^{|x_0|}.\mathrm{e}^{|t|} + 1\Big)|t|$.

3) Supposons que T^+ soit fini. D'après le théorème des bouts, on aurait

$$\lim_{t\to T^+} \|\varphi(t)\| = +\infty$$

mais la question précédente montre que $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ restent bornées lorsque t tend vers T^+, ainsi $\varphi(t)$ resterait aussi bornée lorsque t tend vers T^+.

Cette contradiction montre que $T^+ = +\infty$. De même, on justifie que $T^- = +\infty$. Ainsi $J = \mathbb{R}$.

4) Les points d'équilibre sont donnés par $F(x,y) = \vec{0}$ soit $\sin(x+y) = 0$ et $\mathrm{e}^x - 1 = 0$. Il s'agit donc des points $\big(0, (2k+1)\pi\big)$ où $k \in \mathbb{Z}$.