

Examen session 2

Cours - Applications (6,5 points=1,5+(0,5+0,5+0,5)+(1+2,5))

- 1) Énoncer le théorème des bouts (ou de sortie de tout compact).
- 2) Soient $u_1, \dots, u_n$ des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre $n \geq 1$.
 - a) Quelle est la structure algébrique de l'ensemble des solutions ?
 - b) Quelle est la définition du Wronskien associé à $(u_1, \dots, u_n)$?
 - c) À quelle condition (nécessaire et suffisante) est-ce que ce wronskien est non nul ?
- 3) a) Énoncer le théorème d'inversion locale.
 b) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que pour tout réel t : $|f'(t)| \leq k$.

On considère l'application $\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - f(y), y - f(x)) \end{cases}$

- (i) Montrer que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
- (ii) Montrer que Φ réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1 (3,5 points)

Résoudre le problème de Cauchy $ty'(t) + y(t) - t^2 \ln(t) y^2(t) = 0$ et $y(1) = 1$.

Exercice 2 (3 points)

On veut résoudre l'équation différentielle:

$$(\mathcal{E}) \quad x(x+1)y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 3x^2.$$

- 1) Trouver une solution particulière de l'équation homogène associée (par exemple sous la forme d'une fonction polynomiale, en expliquant la stratégie de recherche employée).
- 2) Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.

Exercice 3 (2,5 points)

Résoudre l'équation différentielle: $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = \cos(x)e^{3x}$.

Exercice 4 (2 points)

Soient n un entier (avec $n \geq 1$), $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. On suppose que les coefficients de A et $\vec{y}_0$ sont tous positifs.

Justifier qu'il existe une unique solution Y , définie sur $\mathbb{R}^+$, au problème

$$X'(t) = A.X(t) \quad \text{et} \quad X(0) = \vec{y}_0$$

et montrer que les coefficients de Y sont tous positifs.

Exercice 5 (3 points=0,5+(1+0,5+1))

On s'intéresse au problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathcal{E}) \quad y''(t) = \sin(y(t)) \quad \text{avec} \quad y(0) = \pi/2 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0.$$

1) Montrer que $(\mathcal{E})$ est équivalente à une équation différentielle vectorielle d'ordre 1 que l'on précisera.

2) a) Montrer que $(\mathcal{E})$ admet une unique solution maximale φ , définie sur un intervalle J dont on précisera la forme.

b) Montrer que pour tout $t \in J$, on a $(\varphi'(t))^2 = -2 \cos(\varphi(t))$.

c) Montrer que $J = \mathbb{R}$.