**Université d'Artois. UFR Sciences** **2011/2012**
**Licence Mathématiques 3.**
**Calcul différentiel 2**

# Examen session 2: éléments de correction.

**Cours - Applications** 3.b.i.)

L'hypothèse implique que $|f(t)-f(t')|\leq k|t-t'|$ pour tous réels $t,t'$.

Il y a plusieurs façons possibles de procéder. Faisons un raisonnement direct et fixons $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

On cherche à montrer que l'équation $\big(x-f(y),y-f(x)\big)=(a,b)$ a une unique solution dans $\mathbb{R}^2$. Ce problème est clairement équivalent à montrer l'existence et l'unicité de $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\big(x,y\big)=\big(a+f(y),b+f(x)\big)$, autrement dit que $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $T\big(x,y\big)=\big(a+f(y),b+f(x)\big)$ admet un unique point fixe. Or l'application $T$ est $k$ contractante de $\Big(\mathbb{R}^2,\|.\|_\infty\Big)$ dans lui-même. En effet

$$\begin{array}{rcl}\|T\big(x,y\big)-T\big(x',y'\big)\|_\infty &=& \|\big(f(y)-f(y'),f(x)-f(x')\big)\|_\infty\\ &=& \max\big(|f(y)-f(y')|,|f(x)-f(x')|\big)\\ &\leq& \max\big(k|y-y'|,k|x-x'|\big)\\ &=& k\|\big(x,y\big)-\big(x',y'\big)\|_\infty.\end{array}$$

D'après le théorème du point fixe ($k\in]0,1[$ et l'espace est complet), $T$ admet un unique point fixe.

ii) $\Phi$ est clairement de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (les fonctions coordonnées le sont puisque $f$ est $C^1$).

On va appliquer le théorème d'inversion locale pour montrer que $\Phi^{-1}$ (bien défini d'après i) est $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (on aurait pu aussi appliquer directement le théorème d'inversion globale).

Fixons donc $(a_0,b_0)\in\mathbb{R}^2$. Il existe $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\Phi(x_0,y_0)=(a_0,b_0)$. La jacobienne de $\Phi$ en $(x_0,y_0)$ est

$$\begin{pmatrix}1 & -f'(y_0)\\ -f'(x_0) & 1\end{pmatrix}$$

donc le jacobien vaut $1-f'(y_0).f'(x_0)\geq 1-k^2>0$ ainsi la différentielle de $\Phi$ en $(x_0,y_0)$ est inversible.

On en déduit qu'il existe deux ouverts $U_0$ (contenant $(x_0,y_0)$) et $V_0$ (contenant donc $(a_0,b_0)$) tel que $\Phi$ réalise un $C^1$ difféomorphisme de $U_0$ sur $V_0$. Mais cela signifie que $\Phi^{-1}$ est $C^1$ au voisinage de $(a_0,b_0)$.

**Exercice 1**

Soit $I$ un intervalle inclus dans $\mathbb{R}^{*+}$. Si une solution $y$ (sur $I$) s'annule en $t \in I$ alors d'après l'unicité dans Cauchy-Lipschitz (qui s'applique car $(t, y) \mapsto -t^{-1}y + t\ln(t)\, y^2$ est $\mathcal{C}^1$): $y$ est identiquement nulle sur $I$. La fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ est clairement solution de l'équation mais ne vérifie pas $y(1) = 1$...

On s'intéresse aux solutions non nulles sur un intervalle inclus dans $\mathbb{R}^{*+}$. On notera donc que par continuité sur un intervalle, le signe de ces fonctions (qui ne s'annulent pas) sera constant. Comme on impose $y(1) = 1$, la fonction $y$ est donc strictement positive.

On reconnait une équation de Bernoulli: on considère la fonction $z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$ sur un intervalle $I$ où $y$ ne s'annule pas. L'équation s'écrit alors

$$z'(t) - \frac{1}{t}z(t) = -t\ln(t)$$

et la contrainte $y(1) = 1$ devient $z(1) = 1$. L'équation homogène a pour solution $z(t) = ct$ où $c \in \mathbb{R}$.

Puis on peut par exemple utiliser la méthode de variation de la constante, ce qui donne $c'(t)t = -t\ln(t)$ donc $c(t) = a + t - t\ln(t)$ donc $z(t) = at + t^2 - t^2\ln(t)$, où $a \in \mathbb{R}$. Comme $z(1) = 1$, cela donne $a = 0$.

Ainsi, les solutions sont

$$t \in I \longmapsto \frac{1}{t^2 \ln(\mathrm{e}/t)}$$

où $I$ est un intervalle inclus dans $\mathbb{R}^{*+}$ vérifiant pour tout $t \in I$, $t^2\ln(\mathrm{e}/t) > 0$, soit $I \subset ]0, \mathrm{e}[$.

La solutions maximale est donc

$$t \in ]0, \mathrm{e}[ \longmapsto \frac{1}{t^2 \ln(\mathrm{e}/t)}.$$

**Exercice 2**

1) L'équation homogène associée est $\quad x(x+1)y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0.$

Supposons qu'il existe une solution polynomiale (non triviale !) de degré $d \geq 1$ avec un coefficient dominant $a_d \neq 0$. Par linéarité, on peut supposer $a_d = 1$. On doit avoir, en comparant les termes dominants:

$$d(d-1) - 2 = 0$$

puisque le degré de $x(x+1)y''$ est $d$, comme celui de $y$ alors que celui de $y'$ est $d-1$. Donc $d = 2$. On cherche alors une solution de la forme $x \mapsto x^2 + bx + c$ et en injectant on trouve $b = c = 0$. On obtient que $x \mapsto x^2$ est solution.

2) Soit $(J, y)$ une solution. Raisonnons sur un intervalle $J$ inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. On effectue le changement habituel: $y(x) = x^2 z(x)$, c'est à dire que l'on introduit $z(x) = \dfrac{y(x)}{x^2}$, ce qui est licite puisque $0 \notin J$. L'équation différentielle devient

$$x^3(x+1)z''(x) + x^2(4x+3)z'(x) = 3x^2.$$

On a donc $z'$ solution de l'équation différentielle:

$$x(x+1)U'(x) + (4x+3)U(x) = 3.$$

L'équation homogène associée a pour solution $U(x) = \dfrac{k}{x^3(x+1)}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

La méthode de variation de la constante s'écrit $\dfrac{k'(x)}{x^3(x+1)} = \dfrac{3}{x(x+1)}\cdot$ Cela donne $k(x) = x^3 + c$ où $c \in \mathbb{R}$ donc

$$z'(x) = \frac{x^3+c}{x^3(x+1)} = \frac{1}{(x+1)} + c\Big(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\Big).$$

Ainsi

$$z(x) = \ln|x+1| + c\Big(\frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \ln|x| - \ln|x+1|\Big) + d$$

où $c, d \in \mathbb{R}$ soit

$$y(x) = dx^2 + x^2\ln|x+1| + c\Big(x - \frac{1}{2} + x^2\ln\big(|x|/|x+1|\big)\Big).$$

Il n'y a aucune solution globale (sur $\mathbb{R}$) mais on a une solution qui se prolonge sur $\mathbb{R}^{*+}$ ou $\mathbb{R}^{*-}$ pour $c = 1$; et une solution qui se prolonge sur $]-\infty, -1[$ ou $]-1, +\infty[$ pour $c = 0$.

**Exercice 3** L'équation homogène associée est

$$(\mathcal{E}_{\prime}) \qquad y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0$$

dont l'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r - 3 = 0$, ce qui donne $r = -1$ et $r = 3$.
Ainsi $(\mathcal{E}_{\prime})$ a pour solutions $x \mapsto a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{3x}$ , où $a, b \in \mathbb{R}$.

On pourrait chercher directement une solution particulière sous la forme

$$x \mapsto (a\cos(x) + b\sin(x))\mathrm{e}^{3x}$$

puisque $3+i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique. On va ici utiliser la méthode de variation des constantes qui s'écrit:

$$a'(x)\mathrm{e}^{-x} + b'(x)\mathrm{e}^{3x} = 0 \quad \text{et} \quad -a'(x)\mathrm{e}^{-x} + 3b'(x)\mathrm{e}^{3x} = \cos(x)\mathrm{e}^{3x}.$$

On a donc

$$a'(x) = -b'(x)\mathrm{e}^{4x} \quad \text{et} \quad 4b'(x)\mathrm{e}^{3x} = \cos(x)\mathrm{e}^{3x}.$$

Ainsi $b(x) = \dfrac{1}{4}\sin(x) + \beta$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

Comme $a'(x) = -\dfrac{\cos(x)}{4}\mathrm{e}^{4x} = -\dfrac{1}{4}Re\Big(\mathrm{e}^{(4+i)x}\Big)$, on obtient

$$a(x) = \alpha - \frac{1}{4}Re\Big(\frac{1}{(4+i)}\mathrm{e}^{(4+i)x}\Big) = \alpha - \frac{\mathrm{e}^{4x}}{4\times 17}\big(4\cos(x) + \sin(x)\big)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Finalement,

$$y(x) = \alpha \mathrm{e}^{-x} + \beta \mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{17}\big( - \cos(x) + 4\sin(x)\big)\mathrm{e}^{3x}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

**Exercice 4** Il existe une unique solution $Y$ qui est globale d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

De plus, on sait que $Y(t) = \exp\big(At\big).\vec{y_0}$.

Comme $A^n$ a tous ses coefficients positifs (cf produit matriciel), pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice $A^n t^n$ a aussi tous ses coefficients positifs pour $t \geq 0$. Ainsi la matrice

$$\exp\big(At\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n$$

a tous ses coefficients positifs donc Y(t) aussi (cf produit matriciel).

**Exercice 5** On s'intéresse au problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathcal{E}) \qquad y''(t) = \sin\big(y(t)\big) \qquad \text{avec} \qquad y(0) = \pi/2 \;\text{ et }\; y'(0) = 0.$$

1) On procède comme en cours: soit

$$\vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

$(\mathcal{E})$ est équivalente à $\vec{Y}'(t) = F\big(\vec{Y}(t)\big)$ avec $F(a,b) = \big(\sin(b), a\big)$. De plus les conditions initiales s'écrivent $\vec{Y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/2 \end{pmatrix}$.

2) a) L'application $F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Il existe donc une unique solution maximale $\vec{\Phi}$, définie sur un intervalle $J$, contenant 0, qui est un ouvert de $\mathbb{R}$ , donc de la forme $]T^-, T^+[$ avec $T^- < 0 < T^+$ (où $T^-$ et $T^+$ sont éventuellement infinis).

Mais d'après la question précédente, cela est équivalent à l'existence et l'unicité d'une solution maximale $(J, \varphi)$ au problème initial ($\vec{\Phi} = (\varphi', \varphi)$).

b) En intégrant la relation $2\varphi'\varphi'' = 2\varphi' \sin\varphi$ sur $[0,t]$ avec $t \in J$, on a

$$\big(\varphi'(t)\big)^2 - \big(\varphi'(0)\big)^2 = 2\cos\big(\varphi(0)\big) - 2\cos\big(\varphi(t)\big).$$

Les conditions initiales donnent le résultat.

c) Supposons que $T^+$ soit fini. D'après le théorème des bouts, on aurait

$$\lim_{t \to T^+} \|\vec{\Phi}(t)\| = +\infty$$

mais la question précédente montre que $|\varphi'(t)|$ reste majorée (par $\sqrt{2}$) lorsque $t$ tend vers $T^+$. Cela imposerait donc $\lim\limits_{t \to T^+} |\varphi(t)| = +\infty$ mais on peut (par exemple) observer que sur

$J$, on a $|\varphi(t) - \varphi(0)| \leq \sqrt{2}|t|$ donc $|\varphi(t)| \leq \sqrt{2}T^+ + \pi/2$ sur $[0, T^+]$; ainsi $\varphi(t)$ resterait aussi bornée lorsque $t$ tend vers $T^+$.

*Variante*: la relation (et le théorème des valeurs intermédiaires) montre que $\varphi(t)$ reste dans un intervalle de la forme $\left[\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi\right]$ (puisque son cosinus est négatif) et d'ailleurs la valeur en 0 impose $k = 0$ donc $\varphi$ est bornée par $3\pi/2$.

Cette contradiction montre que $T^+ = +\infty$. De même, on justifie que $T^- = +\infty$. Ainsi $J = \mathbb{R}$.