Examen

Rappel : $\mathbb{D}$ est le disque unité ouvert du plan complexe et $\mathbb{T}$ est le cercle unité.

Exercice 1

Soit $1 \leqslant p < +\infty$.

1) Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{D} = D(0,1)$. On suppose que $|f|^p$ possède un majorant harmonique $u\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction harmonique telle que $|f|^p \leqslant u$. Montrer que $f \in H^p$.

2) Soit $f \in H^p$, et soit f^* sa fonction des limites au bord.

a) Montrer que $|f|^p \leqslant P[|f^*|^p]$ (*on pourra, pour* $1 < p < +\infty$, *appliquer l'inégalité de Hölder à* $P[|f^*|]$ *relativement à une mesure de probabilité convenable*).

b) Montrer que $u = P[|f^*|^p]$ est le plus petit majorant harmonique de $|f|^p$.

3) Soit $f \in H^p$ et φ une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ telle que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. On pose $g = f \circ \varphi$.

a) Avec les notations du 2), montrer que $u \circ \varphi$ est un majorant harmonique de $|g|^p$.

b) En déduire que $g \in H^p$ et que $\|g\|_{H^p} \leqslant \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{1/p} \|f\|_{H^p}$.

Exercice 2

1) Soit $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose qu'il existe $\varphi, \psi \in H^\infty$ telles que $f = \varphi/\psi$. Montrer que $f \in \mathcal{N}$, la classe de Nevanlinna (*indication : se ramener au cas où* φ *et* ψ *ne s'annulent pas, puis au cas où* $|\varphi(z)| \leqslant 1$ *et* $|\psi(z)| \leqslant 1$ *; remarquer qu'alors* $\log^+ |f(z)| \leqslant -\log|\psi(z)|$).

2) Soit $f \in \mathcal{N}$, $f \not\equiv 0$, et B le produit de Blaschke formé avec les zéros de f.

a) Si $g = f/B$, montrer que $\log|g|$ est l'intégrale de Poisson d'une mesure *réelle* μ (*on remarquera que* $\big|\log|g|\big| = 2\log^+|g| - \log|g|$).

b) On écrit $\mu = \mu^+ - \mu^-$, et on pose :

$$\varphi(z) = cB(z)\exp\left[-\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{it}+z}{\mathrm{e}^{it}-z}\, d\mu^-(\mathrm{e}^{it})\right]$$
$$\psi(z) = \exp\left[-\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{it}+z}{\mathrm{e}^{it}-z}\, d\mu^+(\mathrm{e}^{it})\right].$$

Montrer que $\varphi, \psi \in H^\infty$ et que, pour c convenable $f = \varphi/\psi$.

c) En déduire que f possède presque partout sur $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ des limites non tangentielles.

Exercice 3

Soient $p, q > 1$ tels que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. On considère $T \in \pi_p(X, Y)$ et $S \in \pi_q(Y, Z)$.

On veut montrer que $S \circ T \in \pi_1(X, Z)$ avec $\pi_1(S \circ T) \leq \pi_p(T).\pi_q(S)$.

1) Démontrer qu'il existe une mesure de probabilité μ sur la boule unité de X^* avec la propriété : pour tout ξ dans la boule unité de Y^*, il existe $h_\xi \in L^q(B_{X^*}, \mu)$ vérifiant

$$\|h_\xi\|_q \leq \pi_p(T) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in X, \quad \xi\Big(T(x)\Big) = \int_{B_{X^*}} h_\xi(\alpha)\alpha(x)d\mu(\alpha).$$

Indication : appliquer le théorème de Pietsch puis Hahn-Banach dans $L^p(B_{X^*}, \mu)$.

On se donne $x_1, \ldots, x_n \in X$ et on note $\sigma = \sup_{\alpha \in B_{X^*}} \sum_{k=1}^{n} |\alpha(x_k)|$.

Pour chaque k, on pose $a_k = \left(\int_{B_{X^*}} |\alpha(x_k)| d\mu(\alpha) \right)^{1/p}$. On définit $y_k = a_k^{-1} T(x_k)$ si $a_k \neq 0$, et $y_k = 0$ sinon.

2) Justifier que $a_k.y_k = T(x_k)$ pour tout k.

3) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \|S \circ T(x_k)\| \leq \pi_q(S).\sigma^{1/p} \sup_{\xi \in B_{Y^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi(y_k)|^q \right)^{1/q}$.

4) Pour tout ξ dans la boule unité de Y^*, établir

$$|\xi(y_k)| \leq \left(\int_{B_{X^*}} |h_\xi(\alpha)|^q |\alpha(x_k)| d\mu(\alpha) \right)^{1/q}$$

5) En déduire $\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi(y_k)|^q \right)^{1/q} \leq \pi_p(T).\sigma^{1/q}$.

6) Conclure.

Exercice 4

On dit qu'un opérateur T d'un Banach X dans un Banach Y est complètement continu s'il envoie une suite faiblement convergente vers 0 (dans X) sur une suite convergente vers 0 en norme (dans Y). On note $DP(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs complètement continus de X dans Y.

1) Soient $T \in DP(X, Y)$, $S \in B(X_0, X)$ et $R \in B(Y, Y_0)$ (tous les espaces considérés sont des Banach). Montrer que $R \circ T \circ S \in DP(X_0, Y_0)$.

2) Lorsque X est un espace réflexif (et Y quelconque) $DP(X, Y)$ est une des classes d'opérateurs étudiées en cours : laquelle ? Justifier.

3)a) Montrer que la suite $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est faiblement convergente dans H^1.
Soit φ une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ telle que $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$.

b) On suppose que l'opérateur de composition $C_\varphi \in DP(H^1, H^1)$. Montrer que $|\varphi^*| < 1$ presque partout.

Exercice 5

Soit X un espace de Banach complexe séparable et $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur linéaire borné sur X. On dit que T est fréquemment hypercyclique s'il existe un vecteur $x \in X$ tel que pour tout ouvert U non vide de X, l'ensemble

$$N_{U,x} = \{n \in \mathbb{N}\,;\, T^n x \in U\}$$

est de densité inférieure strictement positive. On rappelle que si A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$, la densité inférieure de A est

$$\underline{d}(A) = \liminf_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \#(A \cap [0, N-1]).$$

Si x est tel que $\underline{d}(N_{U,x})$ est strictement positive pour tout ouvert U non vide, on dit que x est un vecteur fréquemment hypercyclique pour T. On note $FHCT)$ l'ensemble des vecteurs fréquemment hypercycliques pout T.

1. Montrer que si $FHC(T)$ est non vide, alors $FHC(T)$ est dense dans X.

2. Montrer que si $x \in FHC(T)$ et p est un polynôme complexe non nul, alors $p(T)x \in FHC(T)$. En déduire que si T est fréquemment hypercyclique, il existe un sous-espace vectoriel M de X dense dans X tel que $M \setminus \{0\} \subseteq FHC(T)$.

3. Supposons que T possède une mesure gaussienne non dégénérée invariante m par rapport à laquelle T est ergodique. Montrer que pour tout ouvert U non vide, on a pour m-presque tout $x \in X$ $\underline{d}(N_{U,x}) = m(U)$. En déduire que T est fréquemment hypercyclique et que $m(FHC(T)) = 1$.

4. Soit $\psi \in H^\infty(\mathbb{D})$ une fonction non constante. Soit $M_\psi : H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{D})$ le multiplicateur associé défini par $M_\psi f = \psi f$ pour $f \in H^2(\mathbb{D})$. Montrer que M_ψ^* est fréquemment hypercyclique si et seulement si $\psi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T}$ est non vide.

5. Sur $\ell_2(\mathbb{N})$ muni de la base canonique $(e_n)_{n \geqslant 0}$, on considère l'opérateur T défini par $Te_0 = 0$ et $Te_n = w_n e_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ où $w_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$.

a. Montrer que T est hypercyclique.

b. Le but de cette question est de montrer que T n'est pas fréquemment hypercyclique. Supposons que $x = (x_n)_{n \geqslant 0} \in \ell_2(\mathbb{N})$ est fréquemment hypercyclique pour T. Montrer qu'il existe un sous-ensemble D de $\mathbb{N}$ de densité inférieure strictement positive tel que pour tout $n \in D$, $|\sqrt{n+1}\, x_n - 1| < \frac{1}{2}$. En déduire que la série $\sum_{n \in D} \frac{1}{n+1}$ converge, et aboutir à une contradiction.