Exercices

feuille 2

Exercice 1 Soient $p, q, r \geq 1$ tels que $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$. On considère $T \in \pi_p(X, Y)$ et $S \in \pi_q(Y, Z)$. Montrer que $ST \in \pi_r(X, Z)$ avec $\pi_r(ST) \leq \pi_p(T).\pi_q(S)$.

Exercice 2 Soient $1 \leq q < p$. Montrer que l'identité vue de $C([0, 1])$ dans $L^p([0, 1])$ n'est pas q-sommante.

Exercice 3 Montrer qu'un opérateur 2-sommant d'un espace L^1 dans un Banach quelconque est en fait 1-sommant.

Exercice 4 **1)** On suppose que $a = (a_n)_n \in \ell^2$. Montrer que l'opérateur de $C(\mathbb{T})$ dans ℓ^1 : $T(f) = \big(a_n\hat{f}(n)\big)_n$ est bien défini et borné.

2) Réciproquement on se donne une suite $(a_n)_n$ tel que pour toute fonction $f \in C(\mathbb{T})$, la série $\sum_{n\geq 0} |a_n\hat{f}(n)|$ converge.

i) Justifier que l'on peut définir un opérateur de $C(\mathbb{T})$ dans ℓ^1 par $T(f) = \big(a_n\hat{f}(n)\big)_n$.

ii) Montrer que $(a_n)_n \in \ell^2$. Indication : on pourra utiliser le théorème de Grothendieck puis Pietsch et enfin appliquer l'inégalité obtenue à $f_t(x) = f(x - t)$ en moyennant sur t.

3) Montrer que l'on a un résultat analogue en remplaçant $C(\mathbb{T})$ par $A(\mathbb{D})$, en utilisant le théorème de Bourgain.

Exercice 5 Soit X un espace de Banach avec une base inconditionnelle $(e_n)_n$, i.e. pour tout $x \in X$, la série $\sum e_n^*(x)e_n$ est inconditionnellement convergente dans X.

1) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon_n \in \mathbb{T}$, on ait

$$\|\sum_{n\geq 0} \varepsilon_n e_n^*(x)e_n\| \leq C\|x\|$$

2) Montrer que tout opérateur 1-sommant de X dans un Banach Y se factorise par ℓ^1.

Exercice 6 *Inégalité de Grothendieck.* Soit A une matrice de taille $N \geq 1$ à coefficients complexes telle que pour tous $a, b \in \mathbb{C}^N$, on ait

$$\Big| \sum_{1 \leq i,j \leq N} A_{i,j} a_i b_j \Big| \leq \sup |a_l| \cdot \sup |b_l|.$$

Montrer que pour tout espace de Hilbert H t tous $h, k \in H^N$, on a

$$\Big| \sum_{1 \leq i,j \leq N} A_{i,j} \langle h_i, k_j \rangle \Big| \leq K_G \sup \|h_l\| \cdot \sup \|k_l\|$$

où K_G est la constante de Grothendieck intervenant dans le Th. de Grothendieck.

Indication: considérer l'application T de ℓ^1_N dans H qui à e_n associe h_n et appliquer le Th. de Grothendieck avec les vecteurs $z_i = \sum_{1 \leq j \leq N} A_{i,j} e_j \in \ell^1_N$.

Exercice 7 Soit $p \in [1, \infty]$. Montrer qu'une suite bornée de H^p est préfaiblement convergente vers 0 si et seulement si elle est uniformément convergente vers 0 sur tout compact.

On pourra s'aider du noyau de Poisson.

Exercice 8 Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $s(z) = \dfrac{1+z}{1-z}\cdot$ On définit la lentille via

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{s(z)^\alpha - 1}{s(z)^\alpha + 1}\cdot$$

Montrer qu'il s'agit d'une application analytique de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$.

Montrer que C_{φ_α} est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Exercice 9 Soit $\varphi(z) = \dfrac{1-z}{2}\cdot$

1) Montrer que l'opérateur de composition C_φ n'est pas compact sur H^2.

1) Montrer que l'opérateur de composition $C_\varphi^2 = C_\varphi \circ C_\varphi$ est compact sur H^2.