Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
Mesure et Intégration (Licence 3 Mathématiques-Informatique)
Daniel Li

INTÉGRATION SUR UN ESPACE PRODUIT

12 février 2008

1 Produit d'espaces mesurables

1.1 Tribu engendrée par une famille d'applications

Nous avons vu que si S est un ensemble, $(S', \mathscr{T}')$ un espace mesurable, et $f\colon S \to S'$ une application, alors

$$f^{-1}(\mathscr{T}') \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{-1}(A')\,;\ A' \in \mathscr{T}'\}$$

est une tribu de parties de S, et que c'est la plus petite pour laquelle f soit mesurable ; on dit que c'est la *tribu engendrée par* f, et on la note $\sigma(f)$.

Définition 1 *Considérons une famille* $(S_j, \mathscr{T}_j)_{j\in J}$ *d'espaces mesurables et, pour chaque* $j \in J$*, une application* $f_j\colon S \to S_j$*. On appelle* tribu engendrée par la famille $(f_j)_{j\in J}$ *la* plus petite *tribu sur* S *rendant toutes les* f_j*,* $j \in J$*, mesurables. On la note* $\sigma(f_j, j \in J)$*.*

Remarque. C'est donc la plus petite tribu contenant toutes les tribus $\sigma(f_j) = f^{-1}(\mathscr{T}_j)$, $j \in J$, c'est-à-dire :

$$\sigma\Big[\bigcup_{j\in J} \sigma(f_j)\Big] = \sigma\Big[\bigcup_{j\in J} f^{-1}(\mathscr{T}_j)\Big].$$

Il faut faire **attention** que (en général) la *réunion* de deux tribus n'est **pas** une tribu.

Proposition 2 *Si l'on a des applications* $g\colon T \to S$ *et* $f_j\colon S \to S_j$*,* $j \in J$*, alors :*

$$\sigma(f_j \circ g, j \in J) = g^{-1}\big[\sigma(f_j, j \in J)\big].$$

Preuve. On sait (voir Chapitre ? ?) que pour tout $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(S)$, on a :

$$\sigma\big[g^{-1}(\mathscr{C})\big] = g^{-1}\big[\sigma(\mathscr{C})\big];$$

il suffit donc d'appliquer ce résultat avec $\mathscr{C} = \bigcup_{j\in J} f_j^{-1}(\mathscr{T}_j)$:

$$\begin{aligned}\sigma(f_j \circ g, j \in J) &= \sigma\Big[\bigcup_{j\in J}(f_j \circ g)^{-1}(\mathscr{T}_j\Big] = \sigma\Big[g^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} f_j^{-1}(\mathscr{T}_j)\Big)\Big]\\ &= g^{-1}\Big[\sigma\Big(\bigcup_{j\in J} f_j^{-1}(\mathscr{T}_j)\Big)\Big] = g^{-1}\big[\sigma(f_j, j \in J)\big]\end{aligned}$$

pour achever la preuve. $\square$

1.2 Produit d'espaces mesurables

Définition 3 *Soit $(S_j, \mathscr{T}_j)_{j\in J}$ une famille d'espaces mesurables. Leur* produit *est l'espace mesurable $(S, \mathscr{T})$ formé de l'ensemble $S = \prod_{j\in J} S_j$ et de la tribu, appelée* produit tensoriel des tribus*, et notée*

$$\mathscr{T} = \bigotimes_{j\in J} \mathscr{T}_j,$$

engendrée par la famille des projections $p_j \colon S \to S_j$, $j \in J$.

On note ce produit d'espaces mesurables $\prod_{j\in J}(S_j, \mathscr{T}_j)$.

Ainsi $\bigotimes_{j\in J} \mathscr{T}_j$ est une autre notation de $\sigma(p_j, j \in J)$.

Remarque. Il résulte de la définition que les *projections* $p_j \colon S \to S_j$, $j \in J$, sont *mesurables*, quand on munit l'ensemble produit $S = \prod_{i\in J} S_i$ de la *tribu produit* $\bigotimes_{i\in J} \mathscr{T}_i$ et S_j de sa tribu $\mathscr{T}_j$.

Dans toute la suite, on ne s'occupera, essentiellement, que du produit de *deux* espaces mesurables S_1 et S_2.

Proposition 4 *Soit $(S_1, \mathscr{T}_1)$ et $(S_2, \mathscr{T}_2)$ deux espaces mesurables. Alors :*

1) $\mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$ est engendrée *par :*

$$\mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2 = \{A_1 \times A_2\,;\ A_1 \in \mathscr{T}_1, A_2 \in \mathscr{T}_2\}.$$

2) Plus généralement, si $\mathscr{T}_1 = \sigma(\mathscr{C}_1)$ et $\mathscr{T}_2 = \sigma(\mathscr{C}_2)$, avec $\underline{S_1 \in \mathscr{C}_1}$ et $\underline{S_1 \in \mathscr{C}_1}$, alors $\mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$ est engendrée par :

$$\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2 = \{C_1 \times C_2\,;\ C_1 \in \mathscr{C}_1, C_2 \in \mathscr{C}_2\}.$$

Preuve. Il suffit de prouver le 2).

- Pour tout $C_1 \in \mathscr{C}_1$, on a :

$$p_1^{-1}(C_1) = C_1 \times S_2 \in \mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2,$$

puisque $S_2 \in \mathscr{C}_2$; ainsi :

$$p_1^{-1}(\mathscr{C}_1) \subseteq \mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2.$$

Alors,

$$p_1^{-1}(\mathscr{T}_1) = p_1^{-1}\big[\sigma(\mathscr{C}_1)\big] = \sigma\big[p_1^{-1}(\mathscr{C}_1)\big] \subseteq \sigma(\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2).$$

De même $p_2^{-1}(\mathscr{T}_2) \subseteq \sigma(\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2)$. Donc :

$$\mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2 = \sigma\big[p_1^{-1}(\mathscr{T}_1) \cup p_2^{-1}(\mathscr{T}_2)\big] \subseteq \sigma(\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2).$$

• Réciproquement, pour $C_1 \in \mathscr{C}_1$ et $C_2 \in \mathscr{C}_2$, on a :

$$C_1 \times C_2 = (C_1 \times S_2) \cap (S_1 \times C_2) = p_1^{-1}(C_1) \cap p_2^{-1}(C_2) \in \sigma(p_1, p_2) = \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2;$$

donc $\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2 \subseteq \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$, et donc $\sigma(\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2) \subseteq \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$. □

1.3 Cas des tribus boréliennes

Soit X_1 et X_2 deux espaces topologiques et $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$ l'ensemble de leurs ouverts respectifs. Par définition :

$$\sigma(\mathscr{O}_1) = \mathcal{B}or\,(X_1) \qquad \text{et} \qquad \sigma(\mathscr{O}_2) = \mathcal{B}or\,(X_2).$$

Comme $X_1 \in \mathscr{O}_1$ et $X_2 \in \mathscr{O}_2$, le 2) de la Proposition nous dit que :

$$\sigma(\mathscr{O}_1 \times \mathscr{O}_2) = \mathcal{B}or\,(X_1) \otimes \mathcal{B}or\,(X_2). \tag{1}$$

Mais, par définition de la *topologie produit*, tout ouvert de $X_1 \times X_2$ s'écrit comme réunion

$$\bigcup_{j \in J} O_{1,j} \times O_{2,j}$$

d'ouverts élémentaires, c'est-à-dire de produits d'ouverts $O_{1,j}$ de X_1 ($O_{1,j} \in \mathscr{O}_1$) et $O_{2,j}$ de X_2 ($O_{2,j} \in \mathscr{O}_2$), J étant un ensemble arbitraire d'indices. En particulier, $O_1 \times O_2$ est un ouvert de $X_1 \times X_2$ si $O_1 \in \mathscr{O}_1$ et $O_2 \in \mathscr{O}_2$, ce qui veut dire que $\mathscr{O}_1 \times \mathscr{O}_2$ est contenu dans l'ensemble des ouverts de $X_1 \times X_2$, et donc dans sa tribu borélienne ; donc, en utilisant (1) :

$$\mathcal{B}or\,(X_1) \otimes \mathcal{B}or\,(X_2) \subseteq \mathcal{B}or\,(X_1 \times X_2).$$

En général, il n'y a pas égalité. Toutefois, dans la plupart des cas usuels, l'égalité est vraie.

Rappelons qu'un espace topologique X est dit *séparable* s'il contient une partie *dénombrable* Δ *dense*. Par exemple, tout sous-espace $X \subseteq \mathbb{R}^N$ est séparable. Plus généralement, tout sous-espace d'un espace **métrique** séparable est séparable.

Maintenant, si (X, d) est un espace métrique séparable, et si $\Delta \subseteq X$ est une partie dénombrable dense, alors l'ensemble des boules ouvertes $B_{ouv}(x, r)$ pour $x \in \Delta$ et $r \in \mathbb{Q}_+^*$ est dénombrable, et tout ouvert O de X peut s'écrire comme réunion d'une sous-famille des ces boules.

On obtient donc :

Proposition 5 *Si* (X_1, d_1) *et* (X_2, d_2) *sont deux espaces* **métriques séparables***, alors :*

$$\mathcal{B}or\,(X_1 \times X_2) = \mathcal{B}or\,(X_1) \otimes \mathcal{B}or\,(X_2).$$

Corollaire 6 *Pour tout* $n \geqslant 2$ *:*

$$\boxed{\mathcal{B}or\,(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}or\,(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}or\,(\mathbb{R})} \quad \textit{(N fois).}$$

Notons aussi (mais cela se voit facilement directement) que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N}) = \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$.

Preuve. Si Δ_1 et Δ_2 sont des parties dénombrables denses de X_1 et X_2, alors $\Delta_1 \times \Delta_2$ est une partie dénombrable dense de $X_1 \times X_2$. Donc, d'après la discussion précédente, tout ouvert O de $X_1 \times X_2$ peut s'écrire :

$$O = \bigcup_{(x_1,x_2)\in\Delta} B_{ouv}(x_1, r_{x_1}) \times B_{ouv}(x_2, r_{x_2}),$$

où $\Delta \subseteq \Delta_1 \times \Delta_2$ et $r_{x_1}, r_{x_2} \in \mathbb{Q}_+^*$. C'est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathscr{O}_1 \times \mathscr{O}_2$; donc $O \in \sigma(\mathscr{O}_1 \times \mathscr{O}_2) = \mathcal{B}or\,(X_1) \otimes \mathcal{B}or\,(X_2)$.

Par conséquent :

$$\mathcal{B}or\,(X_1 \times X_2) \subseteq \mathcal{B}or\,(X_1) \otimes \mathcal{B}or\,(X_2).$$

Comme l'autre inclusion est toujours vraie, on a l'égalité. □

Remarque. On fera attention que les boréliens de $\mathbb{R}^2$ ne sont **pas**, en général, des produits de boréliens de $\mathbb{R}$. Par exemple, un disque de $\mathbb{R}^2$ n'est pas le produit de deux boréliens de $\mathbb{R}$, ni même la réunion d'un nombre fini de tels produits.

1.4 Applications mesurables

Proposition 7 *Soit* $(S, \mathscr{T})$, $(S_1, \mathscr{T}_1)$, $(S_2, \mathscr{T}_2)$ *trois espaces mesurables.*

Une application $f\colon (S, \mathscr{T}) \to (S_1 \times S_2, \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2)$ *est mesurable si et seulement si :*

$$p_1 \circ f\colon (S, \mathscr{T}) \to (S_1, \mathscr{T}_1) \qquad \textit{et} \qquad p_2 \circ f\colon (S, \mathscr{T}) \to (S_2, \mathscr{T}_2)$$

sont mesurables.

Preuve. On a :

$$f^{-1}(\mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2) = f^{-1}\big[\sigma(p_1, p_2)\big] = \sigma(p_1 \circ f, p_2 \circ f),$$

par la Proposition 2. Cela donne le résultat puisque f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2) \subseteq \mathscr{T}$ et que $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont toutes deux mesurables si et seulement si $\sigma(p_1 \circ f, p_2 \circ f) \subseteq \mathscr{T}$. □

Proposition 8 *Soit* $(S, \mathscr{T})$, $(S_1, \mathscr{T}_1)$, $(S_2, \mathscr{T}_2)$ *trois espaces mesurables.*

Supposons que l'application $f\colon (S_1 \times S_2, \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2) \to (S, \mathscr{T})$ *soit mesurable, alors les* applications partielles *:*

$$f_{x_1^0} = f(x_1^0, \,.\,)\colon \quad \begin{array}{ccc} (S_2, \mathscr{T}_2) & \longrightarrow & (S, \mathscr{T}) \\ x_2 & \longmapsto & f(x_1^0, x_2) \end{array} \qquad (x_1^0 \in S_1),$$

et

$$f^{x_2^0} = f(\,.\,, x_2^0)\colon \quad \begin{array}{ccc} (S_1, \mathscr{T}_1) & \longrightarrow & (S, \mathscr{T}) \\ x_1 & \longmapsto & f(x_1, x_2^0) \end{array} \qquad (x_2^0 \in S_2),$$

sont mesurables.

Remarque. Par contre la mesurabilité des applications partielles ne **suffit pas** pour que f soit mesurable (voir plus loin).

Preuve. Fixons $x_1 \in S_1$, et soit :

$$I_{x_1}\colon \quad \begin{array}{ccc} S_2 & \longrightarrow & S_1 \times S_2 \\ x_2 & \longmapsto & (x_1, x_2). \end{array}$$

Comme $p_1 \circ I_{x_1}\colon x_2 \in S_2 \mapsto x_1 \in S_1$ est constante et que $p_2 \circ I_{x_1}\colon x_2 \in S_2 \mapsto x_2 \in S_2$ est l'application identique, ces deux applications sont mesurables ; l'application I_{x_1} est donc mesurable, par la Proposition 7. Il en résulte que $f_{x_1} = f \circ I_{x_1}$ est mesurable.

La preuve est la même pour f^{x_2}. □

Définition 9 *Si* $A \subseteq S_1 \times S_2$*, les* sections *de* A *en* $x_1 \in S_1$ *et en* $x_2 \in S_2$ *sont définies par :*

$$A_{x_1} = \{x_2 \in S_2\,;\ (x_1, x_2) \in A\}\,,$$
$$A^{x_2} = \{x_1 \in S_1\,;\ (x_1, x_2) \in A\}.$$

On a :

Corollaire 10 *Si* A *est une partie mesurable de* $S_1 \times S_2$ *(c'est-à-dire* $A \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$*), alors* $A_{x_1} \in \mathscr{T}_2$ *pour tout* $x_1 \in S_1$ *et* $A^{x_2} \in \mathscr{T}_1$ *pour tout* $x_2 \in S_2$.

Preuve. Il suffit d'appliquer la Proposition 8, en remarquant que $\mathbb{1}_{A_{x_1}} = (\mathbb{1}_A)_{x_1} = \mathbb{1}_A(x_1, \,.\,)$ et $\mathbb{1}_{A^{x_2}} = (\mathbb{1}_A)^{x_2} = \mathbb{1}_A(\,.\,, x_2)$. □

Là aussi, la mesurabilité des sections ne suffit pas pour que A soit mesurable.

Exemple. Prenons, pour $(S_1, \mathscr{T}_1)$ et $(S_2, \mathscr{T}_2)$, $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. Soit D une partie non borélienne de $\mathbb{R}$: $D \notin \mathcal{B}or\,(\mathbb{R})$. Alors l'ensemble

$$A = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \in D\}$$

n'est pas dans $\mathcal{B}or\,(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}or\,(\mathbb{R}) = \mathcal{B}or\,(\mathbb{R}^2)$. En effet, l'application $j\colon x \in \mathbb{R} \mapsto (x, x) \in \mathbb{R}^2$ est continue (car chacune de ses composantes l'est), donc mesurable pour les tribus boréliennes ; comme $j^{-1}(A) = D \notin \mathcal{B}or\,(\mathbb{R})$, c'est que $A \notin \mathcal{B}or\,(\mathbb{R})$.

Néanmoins, on a $A_x = \{x\}$ ou $A_x = \emptyset$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et de même $A^y = \{y\}$ ou $A^y = \emptyset$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, et ce sont des boréliens de $\mathbb{R}$.

2 Mesure-produit

2.1 Unicité des mesures

Comme on l'a dit, sauf si elle est finie, une tribu de parties comporte énormément déléments et savoir si deux mesures sont égales serait impossible à vérifier si l'on ne disposait pas de critères permettant d'assurer leur égalité en testant sur une "petite" partie de la tribu. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 11 (Théorème d'unicité des mesures)
Soit $(S, \mathscr{T})$ un espace mesurable et $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{T}$ une classe de parties mesurables telle que :
1) $\mathscr{C}$ est **stable par intersection finie** *;*
2) $S \in \mathscr{C}$, ou plus généralement : il existe $\boxed{S_n \in \mathscr{C}}$ *tels que :*

$$\boxed{S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq \cdots} \quad \text{et} \quad \boxed{S = \lim_{n\to\infty}\uparrow S_n}.$$

Alors si m_1 et m_2 sont deux mesures positives sur $(S, \mathscr{T})$ telles que :

$$\boxed{m_1(C) = m_2(C) < +\infty\,, \qquad \forall C \in \mathscr{C}},$$

les deux mesures m_1 et m_2 sont égales sur la sous-tribu $\sigma(\mathscr{C})$ engendrée par $\mathscr{C}$.

Remarque. On demande non seulement que m_1 et m_2 soient égales sur $\mathscr{C}$, mais aussi que les valeurs qu'elles prennent sur $\mathscr{C}$ soient **finies**.

Il en résulte, avec la condition 2), que les mesures m_1 et m_2 doivent être *σ-finies* (et même bornées lorsque $S \in \mathscr{C}$).

EXEMPLE ESSENTIEL. Soit $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}or\,(\mathbb{R})$. La classe d'ensembles :

$$\mathscr{C} = \mathscr{I} = \{]a, b[\,;\ -\infty < a \leqslant b < +\infty\}$$

vérifie les conditions 1) et 2) du théorème. Comme $\sigma(\mathscr{I}) = \mathcal{B}or\,(\mathbb{R})$, il en résulte qu'il ne peut exister sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}or\,(\mathbb{R})\big)$ qu'une seule mesure m telle que :

$$m(]a, b[) = b - a, \qquad \forall\,]a, b[\in \mathscr{I}.$$

Cela s'applique aussi si on remplace $\mathbb{R}$ par un intervalle I et que l'on prend pour $\mathscr{C}$ la classe de tous les sous-intervalles de I.

De même, on obtient ainsi l'unicité de la mesure de Lebesgue λ_N sur $\mathbb{R}^N$, en considérant $\mathscr{C} = \{\prod_{k=1}^N]a_k, b_k[\,;\ -\infty < a_k \leqslant b_k < +\infty, 1 \leqslant k \leqslant N\}$.

Donnons une application. Cette formule de changement de variable sera vue dans un cadre plus général, pour les fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$ dans un chapitre ultérieur.

Corollaire 12 (changement de variable) *Soit I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $\varphi\colon I \to J$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour toute $f\colon J \to \overline{\mathbb{R}}$ ou C qui est mesurable positive ou telle que $f \circ \varphi\colon I \to \overline{\mathbb{R}}$ ou C soit intégrable, on a :*

$$\boxed{\int_I f\left[\varphi(x)\right] d\lambda(x) = \int_J f(y)\left|(\varphi^{-1})'(y)\right| d\lambda(y)}.$$

Commentaire au sujet de la valeur absolue. On sait qu'une fonction continue φ entre intervalles de $\mathbb{R}$ est un homéomorphisme si et seulement si φ est strictement monotone. Lorsque φ est strictement croissante, φ^{-1} aussi et sa dérivée est positive : on retrouve bien la formule habituelle. Lorsque φ est strictement décroissante, alors $(\varphi^{-1})'$ est négative, et l'on a, avec les notations de l'intégral de Riemann, si $I =]a, b[$ et $J =]\alpha, \beta[$:

$$\int_a^b f\left[\varphi(x)\right] dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,(\varphi^{-1})'(y)\,dy = \int_\beta^\alpha f(y)\,(\varphi^{-1})'(y)\,dy.$$

La valeur absolue vient maintenant de ce que :

$$\int_\beta^\alpha f(y)\,(\varphi^{-1})'(y)\,dy = -\int_\alpha^\beta f(y)\,(\varphi^{-1})'(y)\,dy = \int_\alpha^\beta f(y)\left|(\varphi^{-1})'(y)\right| dy,$$

puisque $(\varphi^{-1})'(y) < 0$.

Preuve du corollaire. Rappelons que l'on a vu que :

$$\int_I f\left[\varphi(x)\right] d\lambda(x) = \int_J f(y)\,d[\varphi(\lambda)](y),$$

où $\varphi(\lambda)$ est la mesure-image de λ par φ. Il s'agit donc de montrer que l'on a $\varphi(\lambda) = |(\varphi^{-1})'|.\lambda$.

On sait que φ est strictement monotone sur J. Supposons-la par exemple strictement croissante. Il en est alors de même pour φ^{-1}.

Pour tout intervalle $[c, d] \subseteq J$, on a :

$$[\varphi(\lambda)](]c, d[) = \lambda\big(\varphi^{-1}(]c, d[)\big) = \lambda(]\varphi^{-1}(c), \varphi^{-1}(d)[) = \varphi^{-1}(d) - \varphi^{-1}(c).$$

Mais $(\varphi^{-1})'$ est *continue* ; donc le **Théorème fondamental du Calcul Intégral** dit que :

$$\int_c^d (\varphi^{-1})'(y)\,dy = \varphi^{-1}(d) - \varphi^{-1}(c).$$

Ainsi :

$$[\varphi(\lambda)](]c, d[) = \int_c^d (\varphi^{-1})'(y)\,dy = \big((\varphi^{-1})'.\lambda\big)(]c, d[).$$

Le Théorème d'unicité des mesures assure que $\varphi(\lambda) = |(\varphi^{-1})'|.\lambda$. $\square$

Preuve du Théorème. Supposons d'abord que $\underline{S \in \mathscr{C}}$.

Dans ce cas, les mesures m_1 et m_2 sont **bornées**, puisque :

$$m_1(S) = m_2(S) < +\infty.$$

Considérons alors :

$$\mathscr{E} = \{A \in \mathscr{T} \,;\ m_1(A) = m_2(A)\}.$$

Par hypothèse, on a $\boxed{\mathscr{C} \subseteq \mathscr{E}}$.

De plus, $\mathscr{E}$ a les deux propriétés suivantes :

a) $\mathscr{E}$ est **stable par différence** : si $A, B \in \mathscr{E}$, et $A \subseteq B$, alors :

$$m_1(B \setminus A) = m_1(B) - m_1(A) = m_2(B) - m_2(A) = m_2(B \setminus A);$$

donc $B \setminus A \in \mathscr{E}$.

b) $\mathscr{E}$ est **stable par limite croissante** : si $A_n \in \mathscr{E}$ et $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$, alors :

$$m_1(\lim_{n\to\infty}\!\uparrow A_n) = \lim_{n\to\infty}\!\uparrow m_1(A_n) = \lim_{n\to\infty}\!\uparrow m_2(A_n) = m_2(\lim_{n\to\infty}\!\uparrow A_n);$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty}\!\uparrow A_n \in \mathscr{E}$.

Le lemme suivant montre qu'alors $\sigma(\mathscr{C} \subseteq \mathscr{E}$, ce qui prouve le théorème dans ce cas.

Lemme 13 (Lemme des classes monotones) *Soit $\mathscr{C}$ une classe de parties d'un ensemble S telle que :*

1) $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie ;

2) $S \in \mathscr{C}$.

Alors la plus petite *classe $\mathscr{D}$ contenant $\mathscr{C}$ et qui est :*

a) stable par différence ;

b) stable par limite croissante ;

est égale à la tribu $\sigma(\mathscr{C})$ engendrée par $\mathscr{C}$.

Preuve. Toute tribu vérifie a) et b) ; on a donc :

$$\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D} \subseteq \sigma(\mathscr{C}).$$

Pour montrer que $\mathscr{D} = \sigma(\mathscr{C})$, il suffit donc de montrer que $\mathscr{D}$ *est une tribu.*

Pour cela, nous nous servirons du résultat suivant :

Sous-lemme 14 *La famille de parties $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{P}(S)$ est une tribu si et seulement si :*

(i) $S \in \mathscr{D}$;

(ii) $\mathscr{D}$ est stable par passage au complémentaire : $D \in \mathscr{D} \Rightarrow D^c \in \mathscr{D}$;

(iii) $\mathscr{D}$ est stable par limite croissante ;

(iv) $\mathscr{D}$ est stable par intersection finie : $D, D' \in \mathscr{D} \Rightarrow D \cap D' \in \mathscr{D}$.

Preuve du sous-lemme. On sait que toute tribu vérifie ces propriétés. Il suffit donc de voir la réciproque.

Notons que (i) et (ii) entraînent que $\emptyset = S \setminus S \in \mathscr{D}$.

D'autre part, (ii) et (iv) entraînent que :

$$D, D' \in \mathscr{D} \Rightarrow D^c, D'^c \in \mathscr{D} \Rightarrow D^c \cap D'^c \in \mathscr{D} \Rightarrow D \cup D' = (D^c \cap D'^c)^c \in \mathscr{D}.$$

Par récurrence : $D_1, \ldots, D_n \in \mathscr{D} \Rightarrow D_1 \cup \cdots D_n \in \mathscr{D}$.

Maintenant, si $D_n \in \mathscr{D}$, $n \geqslant 1$, alors $D'_n = D_1 \cup \cdots D_n \in \mathscr{D}$, et comme la suite $(D'_n)_{n\geqslant 1}$ est *croissante*, on obtient :

$$\bigcup_{n\geqslant 1} D_n = \bigcup_{n\geqslant 1} D'_n = \lim_{n\to\infty}\!\uparrow D'_n \in \mathscr{D}.$$

Cela termine la preuve. $\square$

Preuve du lemme (suite). Grâce au sous-lemme, il suffit de montrer que $\mathscr{D}$ est stable par intersection finie ; en effet, elle sera alors stable par passage au complémentaire, puisque : $S \in \mathscr{C}$ et $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ entraînent que $S \in \mathscr{D}$; or $\mathscr{D}$ stable par différence et $S \in \mathscr{D}$ entraînent que $\mathscr{D}$ est stable par passage au complémentaire.

Pour cela, posons, pour tout $A \subseteq S$:

$$\mathscr{D}_A = \{D \in \mathscr{D}\,;\ D \cap A \in \mathscr{D}\}.$$

On a $\mathscr{D}_A \subseteq \mathscr{D}$, et $\mathscr{D}_A$ est, comme $\mathscr{D}$, stable par différence et limite croissante.

Comme $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie, on a, pour tout $C \in \mathscr{C}$:

$$C' \in \mathscr{C} \quad \Rightarrow \quad C \cap C' \in \mathscr{C} \subseteq \mathscr{D} \quad \Rightarrow \quad C' \in \mathscr{D};$$

donc $\boxed{\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}}$.

Maintenant, comme $\mathscr{D}_C$ est stable par différence et limite croissante, et que $\mathscr{D}$ est la *plus petite* classe contenant $\mathscr{C}$ et ayant ces propriétés, on obtient $\boxed{\mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}_C}$ (il en résulte que $\mathscr{D}_C = \mathscr{D}$ pour tout $C \in \mathscr{C}$, mais cela ne nous sera pas utile).

Traduisons cette inclusion :

$$(\forall C \in \mathscr{C}) \quad (\forall D \in \mathscr{D}) : \qquad\qquad C \cap D \in \mathscr{D}.$$

Mais cela peut s'écrire aussi :

$$(\forall D \in \mathscr{D}) : \qquad\qquad (\forall C \in \mathscr{C}) \quad C \cap D \in \mathscr{D}_D,$$

soit :

$$(\forall D \in \mathscr{D}) : \qquad\qquad \mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}_D.$$

Comme précedemment, cela entraîne :

$$(\forall D \in \mathscr{D}) : \qquad\qquad \mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}_D,$$

ce qui se traduit en :

$$(\forall D \in \mathscr{D}) \quad (\forall D' \in \mathscr{D}) \ : \qquad\qquad D \cap D' \in \mathscr{D},$$

et cela termine la preuve du lemme des classes monotones. $\square$

Fin de la preuve du théorème d'unicité. On n'a plus $S \in \mathscr{C}$, mais $S = \lim\limits_{n\to\infty}\!\uparrow S_n$, avec $S_n \in \mathscr{C}$.

Pour chaque $n \geqslant 1$, appliquons ce qui précède à S_n, muni de la tribu-trace

$$\mathscr{T}_n = \{A \in \mathscr{T}\ ;\ A \subseteq S_n\}.$$

Comme les mesures m_1 et m_2, restreintes à $\mathscr{T}_n$, sont égales (et finies) sur

$$\mathscr{C}_n = \{C \in \mathscr{C}\ ;\ C \subseteq S_n\},$$

que $S_n \in \mathscr{C}_n$, et que $\mathscr{C}_n$ est stable par intersection finie, on obtient l'égalité de m_1 et m_2 sur $\sigma_{\mathscr{T}_n}(\mathscr{C}_n)$, la sous-tribu de $\mathscr{T}_n$ engendrée par $\mathscr{C}_n$. Mais, comme $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie, on a :

$$\mathscr{C}_n = \{S_n \cap C\ ;\ C \in \mathscr{C}\}.$$

Donc, si $j_n \colon S_n \to S$ est l'injection canonique, on a $\mathscr{C}_n = j_n^{-1}(\mathscr{C})$. Alors :

$$\sigma_{\mathscr{T}_n}(\mathscr{C}_n) = \sigma_{\mathscr{T}_n}\big[j_n^{-1}(\mathscr{C})\big] = j_n^{-1}\big[\sigma(\mathscr{C})\big] = \{S_n \cap A\ ;\ A \in \sigma(\mathscr{C})\}.$$

Ainsi, pour tout $A \in \sigma(\mathscr{C})$, on a, pour tout $n \geqslant 1$:

$$m_1(S_n \cap A) = m_2(S_n \cap A);$$

il en résulte que :

$$\begin{aligned} m_1(A) &= m_1\big(\lim_{n\to\infty}\!\uparrow (S_n \cap A)\big) = \lim_{n\to\infty}\!\uparrow m_1(S_n \cap A) \\ &= \lim_{n\to\infty}\!\uparrow m_2(S_n \cap A) = m_2\big(\lim_{n\to\infty}\!\uparrow (S_n \cap A)\big) = m_2(A), \end{aligned}$$

et cela termine la preuve. $\square$

2.2 Définition de la mesure-produit

Elle résulte du théorème suivant.

Théorème 15 *Soit $(S_1, \mathscr{T}_1, m_1)$ et $(S_2, \mathscr{T}_2, m_2)$ deux espaces mesurés $\underline{\sigma\text{-finis}}$. Alors il* **existe** *une* **unique** *mesure positive sur $(S_1 \times S_2, \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2)$, notée $m_1 \otimes m_2$, telle que :*

$$\boxed{(m_1 \otimes m_2)(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)\, m_2(A_2)}$$

pour tous $A_1 \in \mathscr{T}_1$ et $A_2 \in \mathscr{T}_2$.

De plus, $m_1 \otimes m_2$ est σ-finie. Elle est bornée si m_1 et m_2 le sont.

Rappelons que les *pavés* $A_1 \times A_2$ ne forment pas tous les ensembles de $\mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$).

Définition 16 *La mesure* $m_1 \otimes m_2$ *s'appelle le* produit des mesures m_1 *et* m_2.

L'espace mesuré $(S_1 \times S_2, \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2, m_1 \otimes m_2)$ *s'appelle le* produit des espaces mesurés $(S_1, \mathscr{T}_1, m_1)$ *et* $(S_2, \mathscr{T}_2, m_2)$.

Avant de prouver ce théorème, donnons tout d'abord le **très important** exemple suivant.

Théorème 17 *La mesure de Lebesgue deux-dimensionnelle* λ_2 *sur* $\mathbb{R}^2$*, muni de sa tribu borélienne* $\mathcal{B}or\,(\mathbb{R}^2)$ *est le produit* $\lambda \otimes \lambda$ *de la mesure de Lebesgue* 1*-dimensionnelle sur* $\mathbb{R}$*, muni de sa tribu borélienne* $\mathcal{B}or\,(\mathbb{R})$ *par elle-même.*

Preuve. Rappelons d'abord (Proposition 5) que $\mathcal{B}or\,(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}or\,(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}or\,(\mathbb{R})$. Ensuite, par le Théorème 15, il suffit de montrer que :

$$\lambda_2(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B)$$

pour tous boréliens $A, B \in \mathcal{B}or\,(\mathbb{R})$.

Or on sait, par définition, que :

$$\lambda_2(]a,b[\times]c,d[) = (b-a)(d-c)$$

pour tous $a < b$, $c < d$.

Fixons $a < b$, et posons, pour tout $B \in \mathcal{B}or\,(\mathbb{R})$:

$$m(B) = \lambda_2(]a,b[\times B).$$

Alors m est une mesure positve sur $\mathbb{R}$, et :

$$m(]c,d[) = \lambda_2(]a,b[\times]c,d[) = (b-a)(d-c) = (b-a)\,\lambda(]c,d[).$$

Par unicité, on a $m = (b-a)\,\lambda$.

Fixons maintenant $B \in \mathcal{B}or\,(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(B) < +\infty$, et posons, pour tout $A \in \mathcal{B}or\,(\mathbb{R})$:

$$\mu(A) = \lambda_2(A \times B).$$

Alors μ est une mesure positive sur $\mathbb{R}$ et :

$$\mu(]a,b[) = \lambda_2(]a,b[\times B))m(B) = (b-a)\,\lambda(B) = \lambda(B)\,\lambda(]a,b[) < +\infty;$$

Par unicité, on a donc $\mu = \lambda(B)\,\lambda$, et ainsi :

$$\lambda_2(A \times B) = \mu(A) = \lambda(B)\,\lambda(A).$$

Lorsque $\lambda(B) = +\infty$, posons $B_n = B \cap]-n, n[$. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda_2(A \times B) &= \lambda_2\big(\lim_{n\to\infty}\uparrow A \times B_n\big) = \lim_{n\to\infty}\uparrow \lambda_2(A \times B_n) = \lim_{n\to\infty}\uparrow \lambda(A)\,\lambda(B_n) \\ &= \lambda(A)\,\lambda\big(\lim_{n\to\infty}\uparrow B_n\big) = \lambda(A)\,\lambda(B), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

De la même façon, on a :

Théorème 18 *La mesure de Lebesgue N-dimensionnelle λ_N sur $\mathbb{R}^n$ est égale, pour $1 \leqslant k \leqslant N-1$, à $\lambda_k \otimes \lambda_{N-k}$.*

La preuve du théorème d'existence de la mesure-produit repose sur le lemme suivant, *sans doute le plus profond* de tout ce Cours d'Intégration. C'est sur lui que reposera ensuite le Théorème de Fubini, qui est l'une des propriétés qui fait la supériorité de l'Intégrale de Lebesgue par rapport à celle de Riemann (les conditions d'application du Théorème de Fubini pour l'intégrale de Riemann étant bien trop restrictives : essentiellement on a besoin de la continuité de la fonction, comme fonction des deux variables). C'est le seul endroit du cours où la mesurabilité d'une fonction n'est pas "évidente", et demande vraiment une preuve.

Lemme 19 (LEMME FONDAMENTAL) *Soit $(S_1, \mathscr{T}_1)$ et $(S_2, \mathscr{T}_2)$ deux espaces mesurables et m_2 une mesure σ-finie sur $(S_2, \mathscr{T}_2)$.*

Pour tout $A \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$, l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_A\colon & S_1 & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & x & \mapsto & m_2(A_x), \end{array}$$

où A_x est la section de A en x, est **mesurable**.

Preuve. Posons :

$$\mathscr{B} = \{A \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2\,;\ \varphi_A \text{ mesurable}\}.$$

Il s'agit de montrer que $\mathscr{B} = \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$. Pour cela , nous allons utiliser le Lemme de classes monotones.

Considérons la classe $\mathscr{C} = \mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2$; elle est :

1) stable par intersection finie : si $A_1, B_1 \in \mathscr{T}_1$ et $A_2, B_2 \in \mathscr{T}_2$, alors

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2;$$

2) $S = S_1 \times S_2 \in \mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2$.

D'autre part, $\mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2 \subseteq \mathscr{B}$ car si $A_1 \in \mathscr{T}_1$ et $A_2 \in \mathscr{T}_2$, et $x \in S_1$, on a :

$$\varphi_{A_1\times A_2}(x) = m_2\big((A_1 \times A_2)_x\big) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A_1, \\ m_2(A_2) & \text{si} \quad x \in A_1, \end{cases}$$

c'est-à-dire que $\boxed{\varphi_{A_1\times A_2} = m_2(A_2)\mathbb{1}_{A_1}}$, qui est mesurable.

De plus :

a) $\mathscr{B}$ est *stable par limite croissante* :
si $A_n \in \mathscr{B}$ et $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$, alors

$$m_2\big((\lim_{n\to\infty}\uparrow)_x\big) = m_2\big(\lim_{n\to\infty}\uparrow[(A_n)_x]\big) = \lim_{n\to\infty}\uparrow m_2\big((A_n)_x\big)$$

pour tout $x \in S_1$; donc $\boxed{\varphi_{\lim_{n\to\infty}\uparrow A_n} = \lim_{n\to\infty}\uparrow\varphi_{A_n}}$ est mesurable, et ainsi donc $\lim_{n\to\infty}\uparrow A_n \in \mathscr{B}$.

• Supposons dans un premier temps m_2 bornée.

Alors :

b) $\mathscr{B}$ est *stable par différence* :
si $A, A' \in \mathscr{B}$ avec $A \subseteq A'$, alors, pour tout $x \in S_1$:

$$m_2\big((A' \setminus A)_x\big) = m_2(A'_x \setminus A_x) = m_2(A'_x) - m_2(A_x),$$

de sorte que $\boxed{\varphi_{A'\setminus A} = \varphi_{A'} - \varphi_A}$ est mesurable, et donc $A' \setminus A \in \mathscr{B}$.

Le Lemme des classes monotones nous assure alors que $\mathscr{B} \supseteq \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$, ce qui termine la preuve du Lemme fondamental dans ce cas.

• Lorsque m_2 est seulement σ-finie, on peut écrire :

$$S_2 = \lim_{n\to\infty}\uparrow S_{2,n}, \qquad \text{avec} \qquad S_{2,n} \in \mathscr{T}_2 \quad \text{et} \quad m_2(S_{2,n}) < +\infty,\ \forall n \geqslant 1.$$

Le raisonnement précédent montre que $\mathscr{B} \supseteq \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_{2,n}$, où

$$\mathscr{T}_{2,n} = \mathscr{T}_2 \cap \mathscr{P}(S_{2,n}) = \{A_2 \in \mathscr{T}_2\,;\ A_2 \subseteq S_{2,n}\}$$

est la tribu-trace de $\mathscr{T}_2$ sur $S_{2,n}$.

Mais :

$$A \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad A \cap (S_1 \times S_{2,n} \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_{2,n}.$$

En effet,

$$\tilde{\mathscr{T}} = \{A \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2\,;\ A \cap (S_1 \times S_{2,n} \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_{2,n}\}$$

est une tribu de parties de $S_1 \times S_{2,n}$, comme cela se vérifie facilement, et, pour $A_1 \in \mathscr{T}_1$ et $A_2 \in \mathscr{T}_2$, on a :

$$(A_1 \times A_2) \cap (S_1 \times S_{2,n}) = A_1 \times (A_2 \cap S_{2,n}) \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_{2,n},$$

de sorte que $A_1 \times A_2 \in \tilde{\mathscr{T}}$, et donc $\mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2 = \sigma(\mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2) \subseteq \tilde{\mathscr{T}}$.

Ainsi :

$$A \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad A \cap (S_1 \times S_{2,n} \in \mathscr{B}.$$

Comme on a vu au a) que, dans tous les cas, $\mathscr{B}$ est stable par limite croissante, on obtient :

$$A = \lim_{n\to\infty}\uparrow[A \cap S_{2,n}] \in \mathscr{B},$$

ce qui termine complètement la preuve du Lemme fondamental. $\square$

Preuve du Théorèm 15. Posons, pour tout $A \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$:

$$\boxed{m(A) = \int_{S_1} \varphi_A(x)\, dm_1(x)},$$

ce qui a un sens car φ_A est **mesurable positive**.

Exprimé différemment :

$$\boxed{m(A) = \int_{S_1} m_2(A_x)\, dm_1(x)}. \tag{2}$$

Alors m est une mesure positive sur $(S_1 \times S_2, \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2)$. En effet, il est clair que $m(\emptyset) = 0$ et, si on a des ensembles $A_n \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$, $n \geqslant 1$, deux-à-deux disjoints, alors, pour tout $x \in S_1$, les $(A_n)_x$, $n \geqslant 1$, sont aussi deux-à-deux disjoints ; donc, en posant $A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$, on obtient, puisque $A_x = \bigcup_{n\geqslant 1} (A_n)_x$, par σ-additivité de m_2 :

$$m_2(A_x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_2\big((A_n)_x\big),$$

de sorte qu'en intégrant par rapport à $x \in S_1$, on obtient :

$$\begin{aligned} m(A) = \int_{S_1} m_2(A_x)\, dm_1(x) &= \int_{S_1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} m_2\big((A_n)_x\big)\right] dm_1(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{S_1} m_2\big((A_n)_x\big)\, dm_1(x)\right], \end{aligned}$$

par le Théorème de convergence monotone, pour les séries à termes positifs, et ainsi :

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

De plus, cette mesure vérifie bien, pour $A_1 \in \mathscr{T}_1$ et $A_2 \in \mathscr{T}_2$:

$$\begin{aligned} m(A_1 \times A_2) = \int_{S_1} \varphi_{A_1\times A_2}(x)\, dm_1(x) &= \int_{S_1} m_2(A_2) \mathbb{1}_{A_1}(x)\, dm_1(x) \\ &= m_2(A_2) \int_{S_1} \mathbb{1}_{A_1}(x)\, dm_1(x) = m_2(A_2)\, m_1(A_1); \end{aligned}$$

en notant que si $m_2(A_2) = +\infty$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{S_1} (+\infty) \mathbb{1}_{A_1}(x)\, dm_1(x) &= \int_{S_1} \big(\lim_{n\to\infty}\!\uparrow n\big) \mathbb{1}_{A_1}(x)\, dm_1(x) \\ &= \lim_{n\to\infty}\!\uparrow \int_{S_1} n \mathbb{1}_{A_1}(x)\, dm_1(x) \\ &= \lim_{n\to\infty}\!\uparrow \big[n\, m_1(A_1)\big] = (+\infty)\, m_1(A_1). \end{aligned}$$

En particulier, si m_1 et m_2 sont bornées, on a :

$$m(S_1 \times S_2) = m_1(S_1)\, m_2(S_2) < +\infty,$$

et m l'est aussi. Si m_1 et m_2 sont σ-finies :

$$\begin{cases} S_1 & = \lim\limits_{n\to\infty}\!\uparrow S_{1,n}, \qquad \text{avec} \quad S_{1,n} \in \mathscr{T}_1 \quad \text{et} \quad m_1(S_{1,n}) < +\infty,\ \forall n \geqslant 1, \\ S_2 & = \lim\limits_{n\to\infty}\!\uparrow S_{2,n}, \qquad \text{avec} \quad S_{2,n} \in \mathscr{T}_2 \quad \text{et} \quad m_2(S_{2,n}) < +\infty,\ \forall n \geqslant 1, \end{cases}$$

alors $S_1 \times S_2 = \lim\limits_{n\to\infty}\!\uparrow (S_{1,n} \times S_{2,n})$, avec $S_{1,n} \times S_{2,n} \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$ et $m(S_{1,n} \times S_{2,n}) = m_1(S_{1,n})\, m_2(S_{2,n}) < +\infty$, de sorte que m est σ-finie.

Il ne reste plus qu'à voir l'*unicité*.

Mais si m et m' sont deux mesures positives sur $\mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$ telles que

$$m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)\, m_2(A_2) \qquad \text{et} \qquad m'(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)\, m_2(A_2)$$

pour tous $A_1 \in \mathscr{T}_1$ et $A_2 \in \mathscr{T}_2$, considérons :

$$\mathscr{C} = \{A_1 \times A_2 \in \mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2\,;\ m_1(A_1)\, m_2(A_2) < +\infty\}.$$

Or :

1) $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie (c'est clair) ;

2) on a $S_1 \times S_2 = \lim\limits_{n\to\infty}\!\uparrow (S_{1,n} \times S_{2,n})$, avec $S_{1,n} \times S_{2,n} \in \mathscr{C}$, puisque $m_1(S_{1,n})\, m_2(S_{2,n}) < +\infty$.

De plus :

$$m(A_1 \times A_2) = m'(A_1 \times A_2) < +\infty, \qquad \forall A_1 \times A_2 \in \mathscr{C}.$$

Le Théorème d'unicité des mesures nous dit que $m = m'$. $\square$

Notons que la construction de la mesure-produit (formule (2)), avec le Théorème 18 donne :

Corollaire 20 *Dans* $\mathbb{R}^N$*, tout* sous-espace affine H*, différent de* $\mathbb{R}^N$ *est de mesure de Lebesgue nulle.*

On a déjà vu ce corollaire dans le cas où $H = \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$.

Preuve. Puisque $H \neq \mathbb{R}^N$, un des axes de coordonnées n'est pas parallèle à H. On peut supposer que c'est le premier. Ecrivons $\mathbb{R}^N = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$ (c'est-à-dire que l'on prend $S_1 = \mathbb{R}$ et $S_2 = \mathbb{R}^{N-1}$). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la section H_x est réduite à un point ou est vide ; dans les deux cas $\lambda_{N-1}(H_x) = 0$. Alors la formule (2) donne :

$$\lambda_{N-1}(H) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{N-1}(H_x)\, d\lambda(x) = 0,$$

comme annoncé. $\square$

3 Théorèmes de Fubini

La **façon** dont on a **construit** $m_1 \otimes m_2$ (formule (2)) donne directement de bons théorèmes d'*interversion d'intégrales*.

3.1 Cas des fonctions positives

Dans ce cas, comme d'habitude, tout se passe automatiquement.

Théorème 21 (THÉORÈME de FUBINI-TONELLI)
Soit $(S_1, \mathscr{T}_1, m_1)$ *et* $(S_2, \mathscr{T}_2, m_2)$ *deux espaces mesurés* σ-finis.
Soit $f \colon S_1 \times S_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *une fonction* $\mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$*-mesurable* $\boxed{\textbf{positive}}$.
On pose :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_{S_2} f(x,y)\, dm_2(y)\,, & x \in S_1, \\ G(y) = \displaystyle\int_{S_1} f(x,y)\, dm_1(x)\,, & y \in S_2, \end{cases}$$

Alors :
1) $F \colon S_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *et* $G \colon S_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *sont* **mesurables** *positives ;*
2) on a les égalités :

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{S_1 \times S_2} f(x,y)\, d(m_1 \otimes m_2)(x,y) &= \int_{S_1} \left[\int_{S_2} f(x,y)\, dm_2(y) \right] dm_1(x) \\ &= \int_{S_2} \left[\int_{S_1} f(x,y)\, dm_1(x) \right] dm_2(y). \end{aligned}}$$

En particulier, pour une fonction (mesurable) **positive**, on peut **toujours** *intervertir les intégrales* sur S_1 et sur S_2 et les deux intégrations successives donnent l'intégrale sur le produit.

Notons que l'on peut définir F et G car les applications partielles f_x et f^y sont mesurables (et positives). On notera que :

$$\int_{S_1} \left[\int_{S_2} f(x,y)\, dm_2(y) \right] dm_1(x) = \int_{S_1} F(x)\, dm_1(x)$$
$$\int_{S_2} \left[\int_{S_1} f(x,y)\, dm_1(x) \right] dm_2(y) = \int_{S_2} G(y)\, dm_2(y),$$

et que l'on a besoin de la mesurabilité (avec leur positivité) de F et G pour définir ces intégrales.

Avant de donner la preuve, voyons tout de suite deux exemples d'application.

Exemple 1. Calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$.

Considérons pour cela $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$f(x,y) = y\,\mathrm{e}^{-y^2(1+x^2)}.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, donc est mesurable pour la tribu $\mathcal{B}or\,(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) = \mathcal{B}or\,(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}or\,(\mathbb{R}_+)$. Elle est de plus **positive**. Notons K son intégrale (sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$).

Le Théorème de Fubini-Tonelli, nous dit que, d'une part :

$$\begin{aligned} K = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} y\,\mathrm{e}^{-y^2(1+x^2)}\,dy\right] dx &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{2(1+x^2)}\,\mathrm{e}^{-y^2(1+x^2)}\right]_{y=0}^{y=+\infty} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{2(1+x^2)}\right] dx = \left[\frac{1}{2}\arctan x\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}; \end{aligned}$$

et que, d'autre part :

$$K = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} y\,\mathrm{e}^{-y^2(1+x^2)}\,dx\right] dy = \int_0^{+\infty} y\,\mathrm{e}^{-y^2}\left[\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2x^2}\,dx\right] dy;$$

dans l'intégrale du milieu, on peut pour $y > 0$, et donc pour *presque tout* $y \geqslant 0$, faire le changement de variable $t = yx$, qui donne :

$$K = \int_0^{+\infty} y\,\mathrm{e}^{-y^2}\left[\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\frac{dt}{y}\right] dy = \Big(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,dy\Big)\Big(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\Big) = I^2.$$

On obtient donc $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

Exemple 2. Soit $f\colon S \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable **positive**, et soit

$$A = \{(x,t) \in S \times \mathbb{R}_+\,;\ f(x) > t\}$$

le *sous-graphe* de f.

Le Théorème de Fubini-Tonelli, nous done :

$$(m \otimes \lambda)(A) = \int_{S\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_A(x,t)\,d(m\otimes\lambda)(x,t) = \int_S \left[\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_A(x,t)\,dt\right] dm(x).$$

Mais, pour $x \in S$ fixé, on a :

$$(x,t) \in A \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) > t \qquad \Longleftrightarrow \qquad t \in [0, f(x)[\,;$$

donc :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_A(x,t)\,dt = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{[0,f(x)[}(t)\,dt = \lambda([0,f(x)[) = f(x);$$

il en résulte que :

$$\boxed{(m \otimes \lambda)(A) = \int_S f(x)\,dm(x)} \ :$$

on obtient ainsi que, pour une fonction mesurable **positive** f, **son intégrale est égale à la mesure de son sous-graphe**, c'est-à-dire de la partie entre le graphe de f et l'axe des "abscisses".

D'autre part, Théorème de Fubini-Tonelli nous dit aussi que :

$$(m \otimes \lambda)(A) = \int_0^{+\infty} \left[\int_S \mathbb{1}_A(x,t)\,dm(x) \right] dt = \int_0^{+\infty} m(\{f > t\})\,dt;$$

on obtient donc :

$$\boxed{\int_S f(x)\,dm(x) = \int_0^{+\infty} m(\{f > t\})\,dt},$$

que l'on peut voir comme une forme abstraite de la *formule d'intégration par parties* ; elle montre que la fonction $t \mapsto m(\{f > t\})$, appelée *fonction de distribution* de f est un objet important, qui permet, notamment, de ramener l'intégration sur l'espace abstrait $(S, \mathscr{T}, m)$ à une intégration sur $\mathbb{R}_+$.

Preuve du Théorème de Fubini-Tonelli.

1) <u>Si $f = \mathbb{1}_A$</u>, avec $A \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$, alors :

$$\begin{cases} F(x) & = m_2(A_x) & = \varphi_A(x), \\ G(y) & = m_1(A^y) & = \psi_A(y); \end{cases}$$

le Lemme fondamental nous assure que F est mesurable sur $(S_1, \mathscr{T}_1)$ et G mesurable sur $(S_2, \mathscr{T}_2)$.

La *mesure-produit* $m = m_1 \otimes m_2$ a été définie par :

$$m(B) = \int_{S_1} \varphi_B(x)\,dm_1(x), \qquad \forall B \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2.$$

Mais, symétriquement, si l'on pose :

$$m'(B) = \int_{S_2} \psi_B(y)\,dm_2(y), \qquad \forall B \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2,$$

m' est aussi une mesure positive sur $(S_1 \times S_2, \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2)$, et telle que, pour tous $A_1 \in \mathscr{T}_1$ et $A_2 \in \mathscr{T}_2$, on ait :

$$\begin{aligned} m'(A_1 \times A_2) &= \int_{S_2} \psi_{A_1 \times A_2}(y)\,dm_2(y) = \int_{S_2} m_1(A_1) \mathbb{1}_{A_2}(y)\,dm_2(y) \\ &= m_1(A_1)\,m_2(A_2), \end{aligned}$$

en notant que si $m_1(A_1) = +\infty$, alors :

$$\begin{aligned}\int_{S_2} (+\infty)\mathbb{1}_{A_2}(y)\, dm_2(y) &= \int_{S_2} \lim_{n\to\infty}\!\uparrow n\mathbb{1}_{A_2}(y)\, dm_2(y)\\ &= \mathbb{1}_{A_2}(y)\, dm_2(y) n \int_{S_2} m_2(A_2) = (+\infty) m_2(A_2).\end{aligned}$$

L'**unicité** de la mesure-produit entraîne que $m' = m_1 \otimes m_2$, et donc :

$$(m_1 \otimes m_2)(A) = \int_{S_1} \varphi_A(x)\, dm_1(x) = \int_{S_2} \psi_A(y)\, dm_2(y),$$

c'est-à-dire :

$$(m_1 \otimes m_2)(A) = \int_{S_1} F(x)\, dm_1(x) = \int_{S_2} G(y)\, dm_2(y).$$

2) *Si f est étagée* : $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$, avec $A_k \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$ et $a_k \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{cases} F(x) &= \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k \int_{S_2} \mathbb{1}_{A_k}(x,y)\, dm_2(y) &= \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k \varphi_{A_k}(x)\\ G(y) &= \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k \int_{S_1} \mathbb{1}_{A_k}(x,y)\, dm_1(x) &= \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k \psi_{A_k}(y); \end{cases}$$

donc F et G sont mesurables, et :

$$\begin{aligned}\int_{S_1\times S_2} f(x,y)\, d(m_1\otimes m_2)(x,y) &= \sum_{k=1}^n a_k \int_{S_1\times S_2} \mathbb{1}_{A_k}(x,y)\, d(m_1\otimes m_2)(x,y)\\ &= \sum_{k=1}^n a_k \int_{S_1} \left[\int_{S_2} \mathbb{1}_{A_k}(x,y)\, dm_2(y)\right] dm_1(x)\\ &= \sum_{k=1}^n a_k \int_{S_2} \left[\int_{S_1} \mathbb{1}_{A_k}(x,y)\, dm_1(x)\right] dm_2(y),\end{aligned}$$

par le cas 1).

3) *Si f est mesurable positive*, il existe une suite croissante de fonctions $f_n \colon S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}_+$ étagées positives, croissant vers f. D'après le cas 2), si l'on pose :

$$\begin{cases} F_n(x) &= \displaystyle\int_{S_2} f_n(x,y)\, dm_2(y),\\ G_n(y) &= \displaystyle\int_{S_1} f_n(x,y)\, dm_1(x), \end{cases}$$

alors F_n et G_n sont mesurables. Comme elles sont aussi positives, le Théorème de convergence monotone donne :

$$F(x) = \int_{S_2} f(x,y)\, dm_2(y) = \lim_{n\to\infty}\!\uparrow \int_{S_2} f_n(x,y)\, dm_2(y) = \lim_{n\to\infty}\!\uparrow F_n(x),$$

et de même :

$$G(y) = \int_{S_1} f(x,y)\, dm_1(x) = \lim_{n\to\infty}\!\uparrow \int_{S_1} f_n(x,y)\, dm_1(x) = \lim_{n\to\infty}\!\uparrow G_n(y);$$

donc F et G sont mesurables (positives), et :

$$\begin{aligned}
\int_{S_1\times S_2} f(x,y)\, d(m_1\otimes m_2)(x,y) &= \lim_{n\to\infty}\!\uparrow \int_{S_1\times S_2} f_n(x,y)\, d(m_1\otimes m_2)(x,y) \\
&\qquad \text{par le Théorème de convergence monotone} \\
&= \lim_{n\to\infty}\!\uparrow \int_{S_1} \left[\int_{S_2} f_n(x,y)\, dm_2(y)\right] dm_1(x) \\
&\qquad \text{par le cas 2)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\!\uparrow \int_{S_1} F_n(x)\, dm_1(x) \\
&= \int_{S_1} \lim_{n\to\infty}\!\uparrow F_n(x)\, dm_1(x) \\
&\qquad \text{par le Théorème de convergence monotone} \\
&= \int_{S_1} F(x)\, dm_1(x).
\end{aligned}$$

de même :

$$\int_{S_1\times S_2} f(x,y)\, d(m_1\otimes m_2)(x,y) = \int_{S_2} G(y)\, dm_2(y),$$

et cela termine la preuve. □

3.2 Fonctions à valeurs réelles ou complexes

Donnons maintenant la forme génŕale du Théorème de Fubini.

Théorème 22 (THÉORÈME DE FUBINI)
*Soit $(S_1, \mathscr{T}_1, m_1)$ et $(S_2, \mathscr{T}_2, m_2)$ deux espaces mesurés σ-*finis.
Soit $f\colon S_1\times S_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ une application $\mathscr{T}_1\otimes\mathscr{T}_2$-mesurable. Alors :

1) f est $m_1\otimes m_2$-intégrable si et seulement si *:*

$$\int_{S_1}\left[\int_{S_2} |f(x,y)|\, dm_2(y)\right] dm_1(x) < +\infty,$$

ou aussi si et seulement si :

$$\int_{S_2}\left[\int_{S_1} |f(x,y)|\, dm_1(x)\right] dm_2(y) < +\infty.$$

2) Dans ce cas :

a) $\begin{cases} f_x \ \textit{est}\ m_2\text{-intégrable } \textit{pour}\ m_1\textbf{-presque tout}\ x \in S_1 \\ f^y \ \textit{est}\ m_1\text{-intégrable } \textit{pour}\ m_2\textbf{-presque tout}\ y \in S_2 \end{cases}$

b) les fonctions $F\colon S_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ et $G\colon S_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} F(x) &= \displaystyle\int_{S_2} f(x,y)\,dm_2(y) \\ G(y) &= \displaystyle\int_{S_1} f(x,y)\,dm_1(x) \end{cases}$$

sont **définies presque partout** sur S_1 et S_2, respectivement, et y sont (mesurables et) **intégrables**.

3) On a les égalités :

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{S_1\times S_2} f(x,y)\,d(m_1\otimes m_2)(x,y) &= \int_{S_1}\left[\int_{S_2} f(x,y)\,dm_2(y)\right]dm_1(x) \\ &= \int_{S_2}\left[\int_{S_1} f(x,y)\,dm_1(x)\right]dm_2(y). \end{aligned}}$$

REMARQUE IMPORTANTE. le Théorème de Fubini s'utilise donc en deux temps : d'abord **vérifier la condition d'intégrabilité**, énoncée au 1) (qui est l'application du Théorème de Fubini-Tonelli à $|f|$) ; ensuite, on peut utiliser les égalités du 3). Ce seront essentiellement deux fois les mêmes calculs à faire (une fois avec $|f|$, et une fois avec f elle-même), mais on ne peut pas s'y soustraire.

Preuve. Le 1), comme on vient de le dire, résulte du Théorème de Fubini-Tonelli à $|f|$.

Pour le reste, on peut supposer f à valeurs réelles, en séparant, dans le cas complexe, les parties réelle et imaginaire.

2) a) Comme :

$$\int_{S_1}\left[\int_{S_2} |f(x,y)|\,dm_2(y)\right]dm_1(x) < +\infty,$$

on a, pour m_1-presque tout $x \in S_1$ (toute fonction intégrable étant finie presque partout), disons pour tout $x \in S_1 \setminus N_1$,avec $m_1(N_1) = 0$:

$$\int_{S_2} |f(x,y)|\,dm_2(y) < +\infty,$$

ce qui est la m_2-intégrabilité de f_x, pour ces $x \in S_1 \setminus N_1$ (rappelons que f_x est toujours mesurable, f l'étant). Alors, pour $x \in S_1 \setminus N_1$, l'intégrale :

$$F(x) = \int_{S_2} f(x,y)\,dm_2(y)$$

existe.

De même, f^y est m_1-intégrable pour m_2-presque tout $y \in S_2$, disons pour tout $y \in S_2 \setminus N_2$, avec $m_2(N_2) = 0$, et l'intégrale :

$$G(y) = \int_{S_1} f(x,y)\, dm_1(x)$$

existe pour tout $y \in S_2 \setminus N_2$.

2) b) et 3) Définissons :

$$\begin{cases} F^\natural(x) &= \displaystyle\int_{S_2} f^+(x,y)\, dm_2(y) \\ F^\flat(x) &= \displaystyle\int_{S_2} f^-(x,y)\, dm_2(y). \end{cases}$$

Le Théorème de Fubini-Tonelli dit que $F^\natural$ et $F^\flat$ sont mesurables. De plus, pour $x \in S_1 \setminus N_1$:

$$0 \leqslant F^\natural(x), F^\flat(x) \leqslant \int_{S_2} |f(x,y)|\, dm_2(y) < +\infty,$$

et l'on a :

$$F(x) = F^\natural(x) - F^\flat(x), \qquad \forall x \in S_1 \setminus N_1.$$

Posons $F(x) = 0$ pour $x \in N_1$, nous obtenons une fonction $F \colon S_1 \to \mathbb{R}$ qui est *mesurable*. De plus, comme :

$$\begin{aligned} \int_{S_1} |F(x)|\, dm_1(x) &= \int_{S_1} \left| \int_{S_2} f(x,y)\, dm_2(y) \right| dm_1(x) \\ &\leqslant \int_{S_1} \left[\int_{S_2} |f(x,y)|\, dm_2(y) \right] dm_1(x) < +\infty, \end{aligned}$$

f est m_1-intégrable, et :

$$\begin{aligned} \int_{S_1} F(x)\, dm_1(x) &= \int_{S_1} F^\natural(x)\, dm_1(x) - \int_{S_1} F^\flat(x)\, dm_1(x) \\ &= \int_{S_1 \times S_2} f^+(x,y)\, d(m_1 \otimes m_2)(x,y) \\ &\qquad - \int_{S_1 \times S_2} f^-(x,y)\, d(m_1 \otimes m_2)(x,y) \\ &\qquad \text{par le Théorème de Fubini-Tonelli} \\ &= \int_{S_1 \times S_2} f(x,y)\, d(m_1 \otimes m_2)(x,y). \end{aligned}$$

De même, G est m_2-intégrable et :

$$\int_{S_2} G(y)\, dm_2(y) = \int_{S_1 \times S_2} f(x,y)\, d(m_1 \otimes m_2)(x,y),$$

et cela termine la preuve. $\square$

Remarque. Si l'on prend pour $(S_1, \mathscr{T}_1, m_1)$ et $(S_2, \mathscr{T}_2, m_2)$ l'ensemble $\mathbb{N}^*$, avec sa tribu discrète et la mesure de comptage, on obtient :

Corollaire 23 *Si $(a_{k,n})_{k,n\geqslant 1}$ est une suite double de nombres complexes, et si :*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|a_{k,n}|\Big) < +\infty,$$

alors, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}a_{k,n}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}a_{k,n}\Big).$$

Le contre-exemple suivant montre que les égalités précédentes ne sont pas toujours vérifiées.

Contre-exemple. Soit :

$$a_{k,n} = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad k = n \\ -1 & \text{si} \quad k = n+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} n & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & k \end{array}$$

On a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}a_{k,n}\Big) = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1,$$

tandis que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}a_{k,n}\Big) = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0.$$

Les deux valeurs sont différentes parce que, comme on le vérifie directement :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|a_{k,n}|\Big) = +\infty.$$

3.3 Quelques exemples d'application

3.3.1 Convolution

Théorème 24 *Si* $u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *sont deux fonctions intégrables, alors on peut définir, pour* **presque tout** $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-t)\, v(t)\, d\lambda(t),$$

que l'on appelle le produit de convolution *de* u *et* v *en* x*.*

De plus, si l'on prolonge $u * v$ *par* 0 *là où elle n'est pas définie, alors* $u * v$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$*.*

Preuve. Posons $f(t,x) = u(x-t)\, v(t)$, pour $t, x \in \mathbb{R}$. La fonction f est mesurable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |f(t,x)|\, d(\lambda \otimes \lambda)(t,x) &\overset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |u(x-t)\, v(t)|\, d\lambda(x) \right] d\lambda(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |u(x-t)|\, d\lambda(x) \right] |v(t)|\, d\lambda(t) \\
&\underset{y=x-t}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |u(y)|\, d\lambda(y) \right] |v(t)|\, d\lambda(t) \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}} |u(y)|\, d\lambda(y) \right] \left[\int_{\mathbb{R}} |v(t)|\, d\lambda(t) \right] < +\infty.
\end{aligned}$$

Le Théorème de Fubini dit que

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t,x)\, d\lambda(t)$$

existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et définit une fonction intégrable. □

Définition 25 *Si* $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est une fonction intégrable, on définit sa* transformée de Fourier *en* $y \in \mathbb{R}$ *par :*

$$\widehat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i x y}\, d\lambda(x).$$

Théorème 26 *Si* $u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *sont deux fonctions intégrables, alors :*

$$\widehat{u * v}(y) = \widehat{u}(y)\, \widehat{v}(y), \qquad (\forall y \in \mathbb{R}).$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
\widehat{u*v}(y) &= \int_{\mathbb{R}} (u*v)(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\,d\lambda(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} u(x-t)\,v(t)\,d\lambda(t)\right] \mathrm{e}^{-2\pi ixy}\,d\lambda(x)\\
&\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} u(x-t)\,\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\,d\lambda(x)\right] v(t)\,d\lambda(t)\\
&\underset{z=x-t}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} u(z)\,e^{-2\pi izy}\,\mathrm{e}^{-2\pi ity}\,d\lambda(z)\right] v(t)\,d\lambda(t)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} u(z)\,e^{-2\pi izy}\,d\lambda(z)\right] v(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi ity}\,d\lambda(t)\\
&= \widehat{u}(y)\,\widehat{v}(y).
\end{aligned}$$

On peut utiliser le Théorème de Fubini car :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x-t)\,v(t)\mathrm{e}^{-2\pi ixy}|\,d(\lambda\otimes\lambda)(t,x) = \int_{\mathbb{R}^2} |u(x-t)\,v(t)|\,d(\lambda\otimes\lambda)(t,x) < +\infty,$$

comme on l'a vu dans la preuve du Théorème 24. □

3.3.2 Fonction Gamma

Une fonction très importante en Analyse, autant que le "couple infernal" (*dixit* G. Tennenbaum) formé par le logarithme (népérien) et l'exponentielle, mais peu étudiée dans l'enseignement français, est la *fonction Gamma.*

On pose, pour tout $\alpha > 0$:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt.$$

C'est une intégrale de Riemann généralisée *absolument convergente* : la fonction à intégrer est *positive* et :

• au voisinage de 0 : $t^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-t} \sim \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$ et $1-\alpha < 1$;

• au voisinage de $+\infty$: $\lim_{t\to+\infty} t^2(t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}) = 0$.

La fonction $t \mapsto t^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-t}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$, pour la mesure de Lebesgue, et son intégrale est égale à l'intégrale de Riemann généralisée. On emploiera la notation de l'intégrale de Riemann généralisée.

a) On a, en intégrant par parties :

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha}\mathrm{e}^{-t}\,dt = \Big[t^{\alpha}(-\mathrm{e}^{-t})\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \alpha t^{\alpha-1}(-\mathrm{e}^{-t})\,dt;$$

donc :

$$\boxed{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)}.$$

En particulier, puisque, comme on le voit immédiatement, $\Gamma(1) = 1$, on obtient, par récurrence :

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notons aussi que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$:

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}\,,$$

d'après l'Exemple 1 du paragraphe 3.1.

b) Montrons maintenant la *formule des compléments*. Pour $\alpha, \beta > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta) &= \Big(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt\Big)\Big(\int_0^{+\infty} u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}\,du\Big)\\
&= \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt\Big)\,u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}\,du\\
&\underset{s=u+t}{=} \int_0^{+\infty} \Big(\int_u^{+\infty} (s-u)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{u-s}\,ds\Big)\,u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}\,du\\
&\underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \iint_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*} (s-u)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-s}u^{\beta-1}\,\mathbb{1}_{\{u<s\}}\,d(\lambda\otimes\lambda)(u,s)\\
&\underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{s} (s-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}\,du\Big)\,\mathrm{e}^{-s}\,ds\\
&= \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{s} \Big(1-\frac{u}{s}\Big)^{\alpha-1} s^{\alpha-1}\Big(\frac{u}{s}\Big)^{\beta-1} s\,\frac{du}{s}\Big)\,\mathrm{e}^{-s}\,ds\\
&\underset{v=\frac{u}{s}}{=} \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{1} (1-v)^{\alpha-1}v^{\beta-1}\,dv\Big)\,s^{\alpha+\beta-1}\,\mathrm{e}^{-s}\,ds\\
&= B(\alpha,\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta)\,,
\end{aligned}$$

avec :

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1}v^{\beta-1}\,dv.$$

La *formule des compléments* est, pour $0 < \alpha < 1$:

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\,,$$

que l'on obtient en calculant $B(\alpha, 1-\alpha)$ (on donnera ce calcul en Annexe).

3.3.3 Intégrales fractionnaires

Considérons une fonction intégrable $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Pour $\alpha > 0$, on pose, si $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$(L_\alpha\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt\,.$$

1) Il faut donner **un sens** à cette intégrale. Pour cela, on utilisera le *Théorème de Fubini*. Notons toutefois que, lorsque φ est positive, $(L_\alpha\varphi)(x)$ existe pour tout $x \in [0,1]$, mais peut prendre la valeur $+\infty$.

Posons :

$$f(x,t) = (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\, \mathbb{1}_{\{t<x\}}.$$

Cette application est mesurable sur $[0,1]\times[0,1]$. De plus :

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,t)|\, d(\lambda\otimes\lambda)(x,t) &\underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_0^1 \left(\int_t^1 (x-t)^{\alpha-1}\, dx\right) |\varphi(t)|\, dt \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{\alpha}(x-t)^\alpha\right]_{x=t}^{x=1} |\varphi(t)|\, dt \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_0^1 (1-t)^\alpha |\varphi(t)|\, dt \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha}\int_0^1 |\varphi(t)|\, dt < +\infty;
\end{aligned}$$

f est donc intégrable sur $[0,1]\times[0,1]$, et le Théorème de Fubini dit que :

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\, dt = \int_0^1 f(x,t)\, dt$$

existe pour **presque tout** $x \in [0,1]$, et définit une fonction (mesurable et) intégrable sur $[0,1]$. La fonction $L_\alpha\varphi$ est donc définie presque partout, et est (mesurable et) intégrable sur $[0,1]$. De plus :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |(L_\alpha\varphi)(x)|\, dx &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,t)|\, d(\lambda\otimes\lambda)(x,t) \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 |\varphi(t)|\, dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^1 |\varphi(t)|\, dt.
\end{aligned}$$

2) Nous allons voir que, pour tous $\alpha,\beta > 0$, on a, *presque partout* :

$$L_\alpha(L_\beta\varphi) = L_{\alpha+\beta}\varphi.$$

a) Supposons d'abord φ *positive*. Alors :

$$\begin{aligned}
\big[L_\alpha(L_\beta\varphi)\big](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}(L_\beta\varphi)(t)\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-u)^{\beta-1}\varphi(u)\, du\right] dt \\
&\underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x \left[\int_u^x (x-t)^{\alpha-1}(t-u)^{\beta-1}\, dt\right]\varphi(u)\, du.
\end{aligned}$$

Dans l'intégrale du milieu, on a $0 < u < t < x$; faisons le changement de variable :

$$t = \tau x + (1-\tau)u\,, \qquad \text{avec } 0 < \tau < 1;$$

on a $x-t=(1-\tau)(x-u)$, $t-u=\tau(x-u)$, et $\tau=\frac{t-u}{x-u}\cdot$ On obtient :

$$
\begin{aligned}
&\big[L_\alpha(L_\beta\varphi)\big](x)\\
&\quad=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x\left[\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}(x-u)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}(x-u)^{\beta-1}\,d\tau\right]\varphi(u)\,du\\
&\quad=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left(\int_0^x(x-u)^{\alpha+\beta-1}\varphi(u)\,du\right)\left(\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}\,d\tau\right)\\
&\quad=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\Gamma(\alpha+\beta)\big(L_{\alpha+\beta}\varphi\big)(x)\,B(\alpha,\beta)\\
&\quad=\big(L_{\alpha+\beta}\varphi\big)(x).
\end{aligned}
$$

De plus, cette valeur est $<+\infty$ pour presque tout $x\in[0,1]$, d'après le 1), puisque $L_{\alpha+\beta}\varphi$ est une fonction intégrable.

b) Lorsque φ est intégrable, de signe quelconque, on applique ce qui précède à $|\varphi|$, pour chaque x tel que $\big(L_{\alpha+\beta}(|\varphi|)\big)(x)<+\infty$. Comme :

$$\big|(L_\beta\varphi)(t)\big|\leqslant\big(L_\beta(|\varphi|)\big)(t),$$

on peut appliquer le Théorème de Fubini, car :

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0,1]\times[0,1]}(x-t)^{\alpha-1}(t-u)^{\beta-1}\mathbb{1}_{\{0<u<t<x\}}|\varphi(u)|\,d(\lambda\otimes\lambda)(t,u)\\
&\qquad\qquad\leqslant\big(L_\alpha(L_\beta(|\varphi|)\big)(x)\overset{a)}{=}\big(L_{\alpha+\beta}(|\varphi|)\big)(x)<+\infty,
\end{aligned}
$$

et les mêmes calculs qu'au a) donnent :

$$\big(L_\alpha(L_\beta(\varphi)\big)(x)=(L_{\alpha+\beta}\varphi)(x)$$

pour presque tout $x\in[0,1]$.

2) Maintenant, si $\varphi\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ est *continue* :

a) Pour $\alpha=1$, on a :

$$(L_1\varphi)(x)=\int_0^x\varphi(t)\,dt,$$

et le **Théorème fondamental du Calcul Intégral** dit que $L_1\varphi$ est *continûment dérivable*, et que $(L_1\varphi)'=\varphi$: $L_1\varphi$ est la primitive de φ s'annulant en 0.

Alors $L_1\varphi$ est en particulier continue, et $L_2\varphi=L_1(L_1\varphi)$ est deux fois continûment dérivable et $(L_2\varphi)''=\varphi$: $L_2\varphi$ est une primitive seconde de φ. Par récurrence, pour tout entier $n\geqslant1$, $L_n\varphi$ est une primitive d'ordre n de φ.

b) Pour tout $\alpha>0$, $L_\alpha\varphi\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ est *continue*.

Notons que l'on ne peut pas utiliser le Théorème de continuité pour les intégrales dépendant d'un paramètre : l'intégrale dépend aussi de la borne supérieure, et si l'on intègre sur $[0,1]$, il faut multiplier à l'intérieur de l'intégrale par $\mathbb{1}_{\{t<x\}}$ qui n'est pas continue lorsque $x=t$.

Nous allons utiliser la continuité uniforme de φ sur $[0,1]$: donnons-nous $\varepsilon > 0$ arbitraire. Il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|u - u'| \leqslant \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\varphi(u') - \varphi(u)| \leqslant \alpha\,\varepsilon.$$

Or, si l'on pose $v = x - t$, on a :

$$(L_\alpha \varphi)(x) = \int_0^x v^{\alpha-1} \varphi(x - v)\, dv;$$

donc, si $0 \leqslant x < x' \leqslant 1$:

$$|(L_\alpha\varphi)(x') - (L_\alpha\varphi)(x)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 v^{\alpha-1} |\varphi(x' - v) - \varphi(x - v)|\, dv$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{x'} (x' - t)^{\alpha-1} |\varphi(t)|\, dt.$$

La première intégrale est, si $0 < x' - x \leqslant \delta$, inférieure à :

$$\alpha\,\varepsilon \int_0^1 v^{\alpha-1}\, dv = \frac{\alpha\,\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon.$$

La seconde est, si l'on pose $M = \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t)|$, inférieure à :

$$M \int_x^{x'} (x' - t)^{\alpha-1}\, dt = \frac{M}{\alpha} (x' - x)^\alpha \leqslant \frac{M}{\alpha}\, \delta^\alpha,$$

qui peut être rendu $\leqslant \varepsilon$, si l'on avait pris le soin de choisir δ suffisamment petit.

c) Ainsi, si $\alpha > 1$, la formule :

$$L_\alpha \varphi = L_1(L_{\alpha-1} \varphi)$$

nous dit, puisque $L_{\alpha-1}\varphi$ est continue, que $L_\alpha\varphi$ est (continûment) dérivable, et que $(L_\alpha\varphi)' = L_{\alpha-1}\varphi$.

On dit que $L_\alpha\varphi$ est l'*intégrale fractionnaire d'ordre* α de φ (bien qu'il vaudrait mieux dire *primitive fractionnaire*).

3.3.4 Annexe

On veut montrer ici que, pour $0 < \alpha < 1$:

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \cdot$$

On a :

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \int_0^1 (1 - v)^{\alpha-1} v^{-\alpha}\, dv = \int_0^1 \left(\frac{1 - v}{v}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{v}\, dv.$$

Commençons par faire le changement de variable $w = \frac{1-v}{v} = \frac{1}{v} - 1$. On obtient :

$$\begin{aligned} B(\alpha, 1-\alpha) &= \int_0^{+\infty} w^{\alpha-1}(w+1)\,\frac{dw}{(w+1)^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{w^{\alpha-1}}{w+1}\,dw. \end{aligned} \tag{3}$$

La meilleure façon de calculer cette intégrale est d'utiliser la *méthode des résidus* ; mais nous pouvons le faire directement, sans utiliser de variable complexe.

Partageons l'intégrale (3) en deux :

$$\int_0^{+\infty} \frac{w^{\alpha-1}}{w+1}\,dw = \int_0^{1} \frac{w^{\alpha-1}}{w+1}\,dw + \int_1^{+\infty} \frac{w^{\alpha-1}}{w+1}\,dw.$$

Si l'on pose :

$$F(\alpha) = \int_0^{1} \frac{w^{\alpha-1}}{w+1}\,dw,$$

on a, en faisant le changement de variable $z = \frac{1}{w}$ dans la seconde intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{w^{\alpha-1}}{w+1}\,dw = F(1-\alpha).$$

Mais :

$$F(\alpha) = \int_{]0,1[} \frac{w^{\alpha-1}}{w+1}\,d\lambda(w),$$

et, pour $0 < w < 1$, on a :

$$\frac{w^{\alpha-1}}{w+1} = w^{-\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n w^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n w^{-\alpha+n}.$$

Si l'on groupe les termes deux-à-deux :

$$\frac{w^{\alpha-1}}{w+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left[w^{-\alpha+2k} - w^{-\alpha+2k+1}\right],$$

on obtient une série à **termes positifs** ; le *Théorème de convergence monotone pour les séries à termes positifs* donne :

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 \left[w^{-\alpha+2k} - w^{-\alpha+2k+1}\right] dw\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{-\alpha+n+1}\,. \end{aligned}$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
B(\alpha, 1-\alpha) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{-\alpha+n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\alpha+n} \\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{-\alpha+n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\alpha+n} \\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{-1}{-\alpha+n} + \frac{1}{\alpha+n} \right] \\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2} \,.
\end{aligned}
$$

Il reste à voir que cette somme est égale à $\pi/\sin(\alpha\pi)$. Nous utiliserons pour cela un développement en série de Fourier.

Considérons la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de période$2\pi$, définie par :

$$
f(x) = \cos(\alpha x)\,, \qquad -\pi < x \leqslant \pi.
$$

Elle est paire, et ses coefficients de Fourier sont, pour $n \geqslant 0$:

$$
\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, \cos(nx)\, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha x)\, \cos(nx)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi \cos(\alpha+n)x\, dx + \int_0^\pi \cos(\alpha-n)x\, dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(\alpha+n)x}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)x}{\alpha-n} \right]_0^\pi \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi} \sin(\alpha\pi) \Big(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n} \Big) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2} \sin(\alpha\pi).
\end{aligned}
$$

Comme f est réglée et possède une dérivée à droite et une dérivée à gauche en chaque point, le Théorème de Jordan-Dirichlet dit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$
\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\, \cos(nx).
$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient :

$$
\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2} \,,
$$

ce qu'il fallait trouver. $\square$