

Problème 2

Autour de la série harmonique.

Dans tout le problème, on définit, pour un entier $N \geq 1$, on note $H_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$.
donc on a $H_1 = 1$ et pour $N \geq 2$:

$$H_N = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}.$$

Partie I.

- 1) Justifier que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.
- 2) Soit $n \geq 1$.

- (i) Montrer que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
- (ii) En déduire que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ est divergente.
- (iii) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

Partie II.

- 1) (i) Soit $k \geq 1$. Montrer que $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$.
- (ii) En déduire que pour tout $n \geq 1$

$$H_n - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n$$

- (iii) En déduire la limite de $\frac{H_n}{\ln(n)}$.

Pour $n \geq 1$, on introduit $\Delta_n = H_n - \ln(n)$.

- 2) Justifier que la suite $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ est bornée.
- 3) (i) Justifier que la fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ est positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- (ii) En déduire la monotonie de $(\Delta_n)_{n \geq 1}$.
- (iii) En déduire la convergence de $(\Delta_n)_{n \geq 1}$.

La limite de $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ sera notée γ et s'appelle la constante d'Euler-Mascheroni.

- 4) (i) Justifier que la fonction $x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe.
(ii) En utilisant un argument de convexité, montrer que pour tout $k \geq 1$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

Indication: on pourra faire un dessin et interpréter en termes d'aire chacun des deux membres

- (iii) En déduire pour tout $k \geq 1$

$$0 \leq \Delta_k - \Delta_{k+1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

- (iv) Conclure que pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq \Delta_n - \gamma \leq \frac{1}{2n}.$$

Partie III. Une application.

Pour un entier $N \geq 1$, on note $A_N = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

- 1) Montrer que pour tout $n \geq 1$: $A_{2n} = H_{2n} - H_n$.
- 2) En utilisant la question III.1. et les résultats du II., établir la convergence de $(A_{2n})_{n \geq 1}$ et déterminer sa limite.
- 3) En déduire la convergence de $(A_n)_{n \geq 1}$ vers $\ln(2)$.