Licence de Mathématiques **1**.
2011-2012. Université d'Artois.
P. Lefèvre

Problème 4

Autour du théorème des valeurs intermédiaires.

Préliminaire.

Soit $s \in \mathbb{N}$ non nul.

$$\varphi_s : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^s \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

1) Montrer que φ_s est continue sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose que $s \geq 2$. Montrer que φ_s est dérivable en 0, que vaut $\varphi_s'(0)$?

Partie I. Théorème de Darboux.

Soient I un intervalle non trivial et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivée: c'est à dire qu'il existe une fonction dérivable $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $F' = f$.

1) Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. On suppose que λ est un réel vérifiant: $f(a) < \lambda < f(b)$. On pose $\Delta(x) = F(x) - \lambda x$ pour $x \in I$.

a) Justifier qu'il existe $c \in [a, b]$ avec $\Delta(c) = \min\{\Delta(x) |\, x \in [a, b]\}$.

b) On suppose que $c = a$. Montrer qu'alors: $\Delta'(a) \geq 0$.

c) Justifier que $c \notin \{a, b\}$ et en déduire que $f(c) = \lambda$.

2) Montrer que f vérifie le théorème des valeurs intermédiaires: l'image par f d'un intervalle est un intervalle.

3) Montrer que ceci généralise le théorème des valeurs intermédiaires vu en cours.

Partie II.

On va montrer dans cette partie qu'il existe des fonctions qui vérifient le théorème des valeurs intermédiaires mais qui ne sont pas des fonctions dérivées.

Soit

$$h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

1) Sur quels intervalles h est continue ?

2) Montrer que h vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

On va montrer que h n'est pas une fonction dérivée.

3) Supposons le contraire.

a) Justifier qu'alors il existe une fonction H, dérivable sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ avec $H(0) = 0$ et $H' = h$.

b) Soient $a, x > 0$. Justifier que $\displaystyle\int_a^x t^2 \cdot \frac{1}{t^2} \cdot \sin(1/t)\, dt = H(x) - H(a)$ puis en déduire que

$$\Big[\varphi_2(t)\Big]_a^x - 2\int_a^x \varphi_1(t)\, dt = H(x) - H(a).$$

c) Montrer que $H'(0) = 0$.

4) Conclure.