Licence de Mathématiques **2**.
Université d'Artois.
P. Lefèvre

Problème 4

Autour de la continuité et de la dérivabilité.

Préliminaire.

Soit $\left(\varepsilon_{k,n}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ des choix de signes, i.e. $\forall k,n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_{k,n} \in \{-1,+1\}$. A n fixé, on note p_n le nombre de $+1$ parmi les $\varepsilon_{k,n}$ où $0 \leq k \leq n$.

On considère $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{k,n}$.

1) Montrer que $s_n = 2p_n - (n+1)$ puis que $\left|s_{n+1} - s_n\right|$ est un entier impair.

2) En déduire que la suite $\left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Partie I] Étude d'un exemple.

On définit

$$\sigma : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \longmapsto & x^2 \sin(1/x) \\ x = 0 & \longmapsto & 0 \end{array} \right.$$

1) Justifier que σ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

2) Démontrer que σ est continue en 0.

3) Démontrer que σ est dérivable en 0. Que vaut $\sigma'(0)$?

4) Justifier que σ n'est pas de classe C^1 en 0.

Partie II] Une propriété des fonctions dérivables.

Dans cette partie, on considère $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I (non vide). On fixe $\alpha \in I$. Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites de I convergentes vers α, avec $a_n \neq b_n$ pour tout $n \geq 1$.

1) Dans cette question uniquement, on suppose que f est de classe C^1 sur I. Montrer que la suite $\displaystyle\left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n\geq 1}$ est convergente vers $f'(\alpha)$.

Indication: on pourra utiliser l'égalité des accroissements finis après avoir énoncé précisément le théorème.

2) Dans cette question uniquement, on suppose que f est dérivable en α

a) on suppose de plus que $a_n \leq \alpha \leq b_n$ pour tout $n \geq 1$.

Montrer que la suite $\displaystyle\left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n\geq 1}$ est convergente vers $f'(\alpha)$.

b) On va voir que le résultat de la question précédente est faux en général si on omet l'hypothèse: $a_n \leq \alpha \leq b_n$. Pour cela, on considère la fonction σ de la partie II et on introduit les deux suites définies pour $n \geq 1$ par

$$a_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \qquad b_n = \frac{1}{2n\pi}$$

(i) Montrer que la suite $\left(\dfrac{\sigma(b_n) - \sigma(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n\geq 1}$ est convergente et préciser sa limite.

(ii) Conclure.

Partie III] Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable.

On va montrer dans cette partie qu'il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable. On commence par définir la fonction $\Delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$\Delta(x) = \text{distance}(x, \mathbb{Z}) = \min\{|x - n|;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

1) Dessiner le graphe de Δ et déterminer l'image de Δ.

2) Montrer que Δ est 1-lipschitzienne.

3) Soient $A, s \in \mathbb{N}$ avec $s \geq 1$.
Montrer que Δ est affine sur tous les intervalles $[A2^{-s}, (A+1)2^{-s}]$. On précisera la pente (en valeur absolue).

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta(2^k x)}{2^k}$ converge.

Dans toute la suite de cette partie, la fonction T est définie par $T(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta(2^k x)}{2^k}$ où $x \in \mathbb{R}$.

5) Démontrer que T est continue sur $\mathbb{R}$.

6) Montrer que T est périodique et donner une période.

7) On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe deux rationnels a_n et b_n, respectivement de la forme $\dfrac{q}{2^n}$ et $\dfrac{q+1}{2^n}$ (avec $q \in \mathbb{Z}$), vérifiant $a_n \leq \alpha < b_n$.

b) Les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont-elles convergentes ? Si oui, vers quelle limite ?

c) Que vaut $\Delta(2^k b_n) - \Delta(2^k a_n)$ pour $k \geq n$?

d) On fixe $0 \leq k < n$ des entiers. Montrer que $\Delta(2^k b_n) - \Delta(2^k a_n) \in \{\pm 2^{k-n}\}$.

e) En déduire que la suite $\left(\dfrac{T(b_n) - T(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n\geq 1}$ est divergente puis que T n'est pas dérivable en α.

8) Conclure.