Licence de Mathématiques **3**.
Université d'Artois.
P. Lefèvre

Problème 1

Autour d'outils classiques d'analyse

Remarque: les deux premières parties sont indépendantes.

Partie I.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \Big(\sin(t)\Big)^n \, dt$ et montrer que $0 < I_{n+1} \leq I_n$.

2) (i) Montrer que $(n+1) \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \Big(\sin(t)\Big)^n \, dt = I_{n+2}$.

(ii) En déduire que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

3) Montrer que $\dfrac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1} \leq I_n$ et en déduire que $I_n \sim I_{n+1}$ quand n tend vers l'infini.

4) Déterminer les valeurs de I_{2n} et I_{2n+1} en fonction n.

Partie II.

Soit $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum b_j$ diverge et telle que la série entière $\sum b_n x^n$ ait un rayon de convergence égal à 1.

On se donne aussi $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} = L \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence égal au moins à 1.

2) (i) Justifier que $x \in [0, 1[\longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est croissante.

(ii) On suppose qu'il existe une limite finie ℓ à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ quand $x \to 1^-$. Montrer que $\ell \geq \displaystyle\sum_{n=0}^{N} b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iii) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = +\infty$.

On fixe $\varepsilon > 0$.

3) (i) Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\Big| \sum_{n=N_0}^{+\infty} (a_n - L b_n) x^n \Big| \leq \varepsilon \sum_{n=N_0}^{+\infty} b_n x^n.$$

(ii) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - Lb_n)x^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} = 0.$

4) Quelle comparaison de comportement asymptotique obtient-on entre $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ quand $x \to 1^-$?

Partie III.

On souhaite obtenir un équivalent de $x \in [0,1[\longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}}\,dt$ quand $x \to 1^-$.

1) Soit $x \in [0,1[$, montrer que l'intégrale $\mathcal{I}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}}\,dt$ est bien définie.

2)(i) Pour $x \in [0,1[$, exhiber le développement en série entière de $t \in [0,1] \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1-xt^2)}}$.

(ii) Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{(1-t^2)}}\,dt$ est bien définie et vaut I_{2n}.

(iii) En déduire que $\mathcal{I}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{2n}}{(2n+1)I_{2n+1}}\,x^n.$

3) Conclure que $\mathcal{I}(x) \sim -\dfrac{1}{2}\ln(1-x)$ quand $x \to 1^-$.