Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
Mesure et Intégration (Licence 3 Mathématiques-Informatique)
Daniel Li

# Théorème de représentation de Riesz

May 9, 2006

C'est un théorème de construction de mesures positives sur les espaces topologiques localement compacts, à partir de formes linéaires positives sur l'espace des fonctions continues à support compact.

En particulier, il permet de construire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

## 1 Préliminaires topologiques

Rappel. Un espace topologique $X$ est localement compact s'il est séparé et si tout point de $X$ possède un voisinage compact.
On montre qu'alors tout point $x \in X$ possède une base de voisinages compacts :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x)\ \exists W \in \mathcal{V}(x) \qquad \text{tel que } W \text{ soit compact et } W \subseteq V\,.$$

**Proposition 1** *Soit $X$ un espace localement compact, $K$ un compact de $X$ et $U$ un ouvert contenant $K$. Alors il existe un ouvert $V$ relativement compact tel que :*

$$K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U\,.$$

Rappelons que *relativement compact* signifie que l'adhérence est compacte.

**Preuve.** Pour tout $x \in K$, il existe un voisinage ouvert $V_x$ de $x$, dont l'adhérence $\overline{V_x}$ est compacte et contenue dans $U$. Comme $K$ est compact, il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que $K$ soit recouvert par $V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$. Si l'on note $V$ cette réunion, c'est un ouvert contenant $K$, et $\overline{V} = \overline{V_{x_1}} \cup \cdots \cup \overline{V_{x_n}}$ est compact et contenu dans $U$. □

Rappelons que si $X$ est un espace topologique et $f\colon X \to \mathbb{C}$, le *support de $f$* est le fermé :

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X\,;\ f(x) \neq 0\}}\,.$$

On a :

$$x \notin \operatorname{supp}(f) \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = 0\,,$$

et $[\operatorname{supp}(f)]^c$ est le *plus grand ouvert* sur lequel $f$ s'annule.

L'ensemble $\mathscr{K}(X)$ des fonctions $f\colon X \to \mathbb{R}$ qui sont *continues* et à *support compact* est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

**Notations.**

1) On écrira $\boxed{K \prec f}$ pour dire que :

a) $K$ est un *compact* de $X$ ;
b) $f \in \mathscr{K}(X)$ ;
c) $\mathbb{1}_K \leqslant f \leqslant \mathbb{1}$,

et l'on dira que $f$ *domine* $K$ et que $K$ *est dominé* par $f$.

**Remarque.** On aura en particulier : $f \geqslant 0$, et : $\quad x \in K \quad \Rightarrow \quad f(x) = 1$.

2) On écrira $\boxed{f \prec \Omega}$ et l'on dira que $\Omega$ *domine* $f$ et que $f$ *est dominée* par $\Omega$ lorsque :

a) $f \in \mathcal{K}(X)$ ;
b) $\Omega$ est un *ouvert* de $X$ ;
c) $0 \leqslant f \leqslant \mathbb{1}_\Omega$ ;
d) $\mathrm{supp}\,(f) \subseteq \Omega$.

**Remarque.** On aura en particulier $0 \leqslant f \leqslant \mathbb{1}$, et :

$$x \in X \setminus \Omega \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0 .$$

**Théorème 2 (Théorème d'Urysohn.)** *Soit $X$ un espace localement compact, $K$ une partie compacte de $X$, et $\Omega$ un ouvert contenant $K$. Alors, il existe $f \in \mathscr{K}(X)$ telle que :*

$$\boxed{K \prec f \prec \Omega} \ .$$

(en particulier, on a $0 \leqslant \mathbb{1}_K \leqslant f \leqslant \mathbb{1}_\Omega$).

**Preuve.** Lorsque $X$ est métrique, il suffit de prendre un ouvert relativement compact $V$ tel que $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$, et :

$$f(x) = \frac{\mathrm{dist}\,(x, V^c)}{\mathrm{dist}\,(x, K) + \mathrm{dist}\,(x, V^c)} \ . \qquad \square$$

Dans le cas général, c'est un plus délicat, et la preuve sera donnée en Annexe à la fin.

**Corollaire 3** *Pour tout ouvert non vide $\Omega$ de $X$, il existe $f$ telle que $f \prec \Omega$.*

**Preuve.** Prendre $a \in \Omega$ puis $K = \{a\}$. $\square$

**Corollaire 4 (partition de l'unité)** *Soit $X$ un espace localement compact, $K$ une partie compacte de $X$, et $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$ un recouvrement* ouvert *de $K$ : $K \subseteq \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_n$.*

*Alors, il existe $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{K}(X)$ telles que :*

$$\left\{ \begin{array}{cc} h_j \prec \Omega_j \,, & 1 \leqslant j \leqslant n \\ h_1(x) + \cdots + h_n(x) = 1 \,, & \forall x \in K. \end{array} \right.$$

On dit que $\{h_1, \ldots, h_n\}$ est une *partition de l'unité* de $K$ *subordonnée au recouvrement* $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$.

**Preuve.** Pour tout $x \in K$, il existe $j \leqslant n$ tel que $x \in \Omega_j$. La Proposition 1 nous dit qu'il existe un ouvert $V_x$ relativement compact tel que $x \in V_x$ et $\overline{V}_x \subseteq \Omega_j$.

Comme $K \subseteq \bigcup_{x \in K} V_x$ et puisque $K$ est compact, il existe un ensemble fini $F \subseteq K$ tel que $K \subseteq \bigcup_{x \in F} V_x$.

Posons :

$$H_j = \bigcup_{\substack{x \in F \\ \overline{V}_x \subseteq \Omega_j}} \overline{V}_x \,.$$

C'est un compact contenu dans $\Omega_j$ ; le Théorème d'Urysohn donne $g_1, \ldots, g_n$ telles que $H_j \prec g_j \prec \Omega_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Les fonctions :

$$\left\{ \begin{array}{ll} h_1 & = g_1 \\ h_2 & = (\mathbb{1} - g_1) g_2 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_n & = (\mathbb{1} - g_1)(\mathbb{1} - g_2) \cdots (\mathbb{1} - g_{n-1}) g_n \end{array} \right.$$

conviennent. □

# 2 Enoncé du Théorème de représentation.

**Théorème 5 (Théorème de représentation de Riesz)** *Soit $X$ un espace localement compact et $L \colon \mathscr{K}(X) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire positive :*

$$f \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad L(f) \geqslant 0.$$

*Alors, il existe une tribu $\mathscr{M}$ de parties de $X$, contenant la tribu borélienne $\mathscr{B}or(X)$ et une unique mesure positive $m = m_L$ sur $(X, \mathscr{M})$ telle que :*

① $L(f) = \int_X f \, dm$, $\forall f \in \mathscr{K}(X)$ ;

② $m(K) < +\infty$ *pour tout compact* $K$ ;

③ ⓐ $m(\Omega) = \sup\{m(K) \,;\ K$ *compact et* $K \subseteq \Omega\}$ *pour tout ouvert* $\Omega$ *de* $X$ ;
ⓑ $m(B) = \sup\{m(K) \,;\ K$ *compact et* $K \subseteq B\}$ *pour toute partie* $B \in \mathscr{M}$ *telle que* $m(B) < +\infty$ ;

④ $m(B) = \inf\{m(\Omega) \,;\ \Omega$ *ouvert et* $B \subseteq \Omega\}$ *pour tout* $B \in \mathscr{M}$.

**Remarque.** Si $X$ est compact, alors $m(X) < +\infty$ et donc ③ⓑ est vrai pour tout $B \in \mathscr{M}$.

**Application : construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.**

Pour toute $f \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$, l'intégrale de Riemann généralisée $R - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge (absolument), et si $\operatorname{supp}(f) \subseteq [\alpha, \beta]$, elle est égale à $R - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$.

L'application

$$\begin{array}{rccl} L\colon & \mathscr{K}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & R - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \end{array}$$

est une forme linéaire positive. Le Théorème de représentation de Riesz dit qu'il existe une mesure positive $\lambda$ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{M})$, donc sur $\big(\mathbb{R}, \mathscr{B}or(\mathbb{R})\big)$, telle que :

$$R - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda\,, \quad \forall f \in \mathscr{K}(\mathbb{R}).$$

Il reste juste à vérifier que :

$$\boxed{\lambda(]a,b[) = b - a} \qquad \forall a < b \in \mathbb{R}\,.$$

Pour cela prenons une fonction $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nulle en dehors de $]a,b[$, valant 1 sur $[a+1/n, b-1/n]$ et affine sur $[a, a+1/n]$ et sur $[b-1/n, b]$. Alors $f_n \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\!\uparrow f_n = \mathbb{1}_{]a,b[}$ ; donc :

$$\begin{aligned} \lambda(]a,b[) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]a,b[}\,d\lambda = \lim_{n\to+\infty}\!\uparrow \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda = \lim_{n\to+\infty}\!\uparrow R - \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx \\ &= \lim_{n\to+\infty}\!\uparrow \Big(b - a - \frac{1}{n}\Big) = b - a. \end{aligned}$$

**Remarque.** Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, on fait pareil ; ou bien on peut la construire comme la mesure-produit $\lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$ ($d$ fois).

**Preuve de l'unicité.** Supposons que $m_1$ et $m_2$ soient comme dans le théorème. Grâce à ③ⓐ et ④, il suffit de montrer que :

$$m_1(K) = m_2(K)\,, \qquad \text{pour tout compact } K.$$

Soit $K$ un compact et $\varepsilon > 0$. Comme $m_2(K) < +\infty$, ④ dit qu'il existe un ouvert $\Omega$ tel que $K \subseteq \Omega$ et

$$m_2(\Omega) \leqslant m_2(K) + \varepsilon.$$

Le Théorème d'Urysohn donne $f$ telle que $K \prec f \prec \Omega$. On a donc :

$$\begin{aligned} m_1(K) &\leqslant \int_X \mathbb{1}_K\,dm_1 \leqslant \int_X f\,dm_1 \overset{①}{=} \int_X f\,dm_2 \\ &\leqslant \int_X \mathbb{1}_\Omega\,dm_2 = m_2(\Omega) \leqslant m_2(K) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent $m_1(K) \leqslant m_2(K)$.

En échangeant les rôles de $m_1$ et $m_2$, on obtient l'inégalité inverse, et donc $m_1(K) = m_2(K)$. $\square$

# 3 Preuve de l'existence.

Elle se fait en plusieurs étapes.

## 3.1 Etape 1.

Posons :

- Pour tout <u>ouvert</u> $\Omega \subseteq X$ :

$$\boxed{m^*(\Omega) = \sup\{L(f)\,;\ f \prec \Omega\}}\,;$$

- puis, pour tout $A \subseteq X$ :

$$\boxed{m^*(A) = \inf\{m^*(\Omega)\,;\ \Omega \text{ \underline{ouvert} et } A \subseteq \Omega\}}\,.$$

On a $m^*(\emptyset) = 0$ et

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad m^*(A) \leqslant m^*(B).$$

**Lemme 6** *Si $\Omega_1$ et $\Omega_2$ sont deux ouverts, alors :*

$$m^*(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leqslant m^*(\Omega_1) + m^*(\Omega_2).$$

**Preuve.** Soit $g \prec \Omega_1 \cup \Omega_2$. Le Théorème de partition de l'unité (avec $\Omega_3 = [\mathrm{supp}\,(g)]^c$) donne $h_1 \prec \Omega_1$ et $h_2 \prec \Omega_2$ telles que :

$$h_1(x) + h_2(x) = 1\,, \quad \forall x \in \mathrm{supp}\,(g).$$

Alors $h_1 g \prec \Omega_1$, $h_2 g \prec \Omega_2$ et $g = h_1 g + h_2 g$ ; donc :

$$L(g) = L(h_1 g) + L(h_2 g) \leqslant m^*(\Omega_1) + m^*(\Omega_2)\,;$$

d'où $m^*(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leqslant m^*(\Omega_1) + m^*(\Omega_2)$. □

**Proposition 7** *Pour tous $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \subseteq X$, on a :*

$$m^*\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n) \qquad \text{(sous $\sigma$-additivité).}$$

**Preuve.** On peut supposer $m^*(A_n) < +\infty$ pour tout $n \geqslant 1$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour tout $n \geqslant 1$, il existe un ouvert $\Omega_n \supseteq A_n$ tel que :

$$m^*(\Omega_n) \leqslant m^*(A_n) + \varepsilon/2^n.$$

Posons $\Omega = \bigcup_{n\geqslant 1} \Omega_n$ ; c'est un ouvert. Pour toute $f \prec \Omega$, il existe, puisque $\mathrm{supp}\,(f)$ est compact, un $n \geqslant 1$ tel que :

$$f \prec \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_n.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}L(f) &\leqslant m^*(\Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m^*(\Omega_k)\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \Big[m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^k}\Big] \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(A_n) + \varepsilon\,;\end{aligned}$$

d'où $m^*(\Omega) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} m^*(A_n) + \varepsilon$.

Comme $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k \subseteq \Omega$, on obtient $m^*\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k\Big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} m^*(A_k) + \varepsilon$, et par conséquent $m^*\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k\Big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} m^*(A_k)$ puisque $\varepsilon > 0$ est quelconque. $\square$

## 3.2 Etape 2.

**Définition 8** *On dit que $A \subseteq X$ est quasi-mesurable si*

$$m^*(A) = \sup\{m^*(K)\,;\ K \text{ compact et } K \subseteq A\}.$$

*On notera $\mathscr{QM}$ l'ensemble des parties quasi-mesurables.*

**Proposition 9 (importante)**
1) *Toute partie $A \subseteq X$ telle que $m^*(A) = 0$ est quasi-mesurable.*
2) *Tout compact $K \subseteq X$ est quasi-mesurable et, de plus, $m^*(K) < +\infty$.*
3) *Tout ouvert $\Omega$ est quasi-mesurable.*

Le 1) est évident, de même que le fait que les compacts soient quasi-mesurables. Pour montrer que $m^*(K) < +\infty$, on utilisera le lemme suivant.

**Lemme 10** $$K \prec f \prec \Omega \quad \Rightarrow \quad m^*(K) \leqslant L(f) \leqslant m^*(\Omega).$$

**Preuve.** L'inégalité de droite provient de la définition de $m^*(\Omega)$. Pour l'autre, soit $\alpha > 0$ tel que $0 < \alpha < 1$. Posons :

$$\Omega_\alpha = \{f > \alpha\}.$$

C'est un ouvert et $K \subseteq \Omega_\alpha$ (car $\alpha < 1$). Par définition, il existe $\varphi \prec \Omega_\alpha$ telle que :

$$m^*(\Omega_\alpha) \leqslant L(\varphi) + (1 - \alpha).$$

Comme $\varphi \leqslant \mathbb{1}_{\Omega_\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha} f$, on obtient :

$$m^*(K) \leqslant m^*(\Omega_\alpha) \leqslant L(\varphi) + (1 - \alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha} L(f) + (1 - \alpha)\,;$$

d'où $m^*(K) \leqslant L(f)$, en faisant tendre $\alpha$ vers 1. $\square$

*Suite de la preuve de* 2). Par le Théorème d'Urysohn, il existe $f$ telle que $K \prec f \prec X$, et le lemme donne $m^*(K) \leqslant L(f) < +\infty$.

**Preuve de** 3)**.** Le cas $m^*(\Omega) = 0$ est évident (voir 1)). On suppose donc $m^*(\Omega) > 0$. Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha < m^*(\Omega)$. Par définition, il existe $f \prec \Omega$ telle que :

$$\alpha \leqslant L(f) \leqslant m^*(\Omega).$$

Posons $K = \operatorname{supp}(f)$. Pour tout ouvert $V \supseteq K$, on a $f \prec V$ ; donc $L(f) \leqslant m^*(V)$, et par conséquent :

$$L(f) \leqslant \inf\{m^*(V)\,;\ V \text{ ouvert et } K \subseteq V\} = m^*(K).$$

Alors $\alpha \leqslant m^*(K)$. Puisque $\alpha < m^*(\Omega)$ est arbitraire, on obtient :

$$m^*(\Omega) \leqslant \inf\{m^*(K)\,;\ K \text{ compact et } K \subseteq \Omega\}\,,$$

d'où l'égalité, car $\geqslant$ est évident. □

### 3.3 Etape 3 : $\sigma$-additivité de $m^*$ pour les ensembles quasi-mesurables.

**Lemme 11** *Si $K_1$ et $K_2$ sont deux compacts* <u>*disjoints*</u> *de $X$, alors :*

$$m^*(K_1 \cup K_2) = m^*(K_1) + m^*(K_2).$$

**Preuve.** $K_2^c$ est un ouvert tel que $K_1 \subseteq K_2^c$. Par la Proposition 1, il existe un ouvert relativement compact $\Omega$ tel que $K_1 \subseteq \Omega \subseteq \overline{\Omega} \subseteq K_2^c$. Alors $\Omega_1 = \Omega$ et $\Omega_2 = (\overline{\Omega})^c$ sont deux ouverts disjoints et $K_1 \subseteq \Omega_1$ et $K_2 \subseteq \Omega_2$.

Maintenant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $V$ tel que $K_1 \cup K_2 \subseteq V$ et $m^*(V) \leqslant m^*(K_1 \cup K_2) + \varepsilon/3$. Il existe de plus $f_1 \prec \Omega_1 \cap V$ et $f_2 \prec \Omega_2 \cap V$ telles que :

$$m^*(\Omega_1 \cap V) \leqslant L(f_1) + \varepsilon/3 \quad \text{et} \quad m^*(\Omega_2 \cap V) \leqslant L(f_2) + \varepsilon/3.$$

Donc

$$\begin{aligned} m^*(K_1) + m^*(K_2) &\leqslant m^*(\Omega_1 \cap V) + m^*(\Omega_2 \cap V) \\ &\leqslant L(f_1) + \frac{\varepsilon}{3} + L(f_2) + \frac{\varepsilon}{3} = L(f_1 + f_2) + \frac{2\varepsilon}{3}\cdot \end{aligned}$$

Comme $f_1 + f_2 \prec V$ (car $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$), on a :

$$L(f_1 + f_2) \leqslant m^*(V) \leqslant m^*(K_1 \cup K_2) + \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

Finalement :

$$m^*(K_1) + m^*(K_2) \leqslant m^*(K_1 \cup K_2) + \varepsilon\,;$$

d'où $m^*(K_1) + m^*(K_2) \leqslant m^*(K_1 \cup K_2)$, puisque $\varepsilon > 0$ était arbitraire, et il y a l'égalité, puisque $\geqslant$ provient de la sous $\sigma$-additivité. □

**Proposition 12** *Si les $A_n$ sont* <u>*quasi-mesurables*</u>*, $n \geqslant 1$, et sont* <u>*deux-à-deux disjoints*</u>*, alors $A = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n$ est quasi-mesurable, et :*

$$m^*\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n).$$

**Preuve.** S'il existe un $n \geqslant 1$ tel que $m^*(A_n) = +\infty$, c'est évident (les deux côtés valent $+\infty$). On suppose donc $m^*(A_n) < +\infty$ pour tout $n \geqslant 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des compacts $H_n \subseteq A_n$ tels que :

$$m^*(A_n) \leqslant m^*(H_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \cdot$$

Posons $K_n = H_1 \cup \cdots \cup H_n$ ; c'est un compact contenu dans $A$, et :

$$\begin{aligned} m^*(A) \geqslant m^*(K_n) &= \sum_{k=1}^{n} m^*(H_k) \quad \text{car } A_1, \ldots, A_n \text{ étant deux-à-deux disjoints, } H_1, \ldots, H_n \text{ le sont aussi} \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n} m^*(A_k) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Il en résulte que $m^*(A) \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(A_k)$, et donc que l'on a l'égalité puisque $\leqslant$ est toujours vrai, par sous $\sigma$-additivité.

De plus, si l'on pose :

$$S = \sup\{m^*(K) \, ; \; K \text{compact et } K \subseteq A\},$$

on a :

$$S \geqslant m^*(K_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} m^*(A_k) - \varepsilon \, ;$$

donc $S \geqslant m^*(A)$, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. Il en résulte que $S = m^*(A)$ et $A$ est quasi-mesurable. □

**Corollaire 13** *Soit $A$ une partie quasi-mesurable telle que $m^*(A) < +\infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K$ et un ouvert $\Omega$ tels que $K \subseteq A \subseteq \Omega$ et $m^*(\Omega \setminus K) \leqslant \varepsilon$.*

**Preuve.** Par définition de $m^*$ et des parties quasi-mesurables, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K$ et un ouvert $\Omega$ tels que $K \subseteq A \subseteq \Omega$ et

$$m^*(\Omega) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant m^*(A) \leqslant m^*(K) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

Comme $\Omega \setminus K$ est un ouvert, il est quasi-mesurable. De plus, il est disjoint du compact $K$, qui est quasi-mesurable. La Proposition 12 donne :

$$m^*(K) + m^*(\Omega \setminus K) = m^*(\Omega) \leqslant m^*(K) + \varepsilon \, ;$$

d'où le résultat, en simplifiant par $m^*(K) < +\infty$. □

**Corollaire 14** *Si $A$, $B$ sont deux parties quasi-mesurables telles que $m^*(A) < +\infty$ et $m^*(B) < +\infty$, alors l'ensemble $A \setminus B = A \cap B^c$ est quasi-mesurable.*

**Preuve.** Soit $\varepsilon > 0$. Le Corollaire 13 donne des compacts $K_1$ et $K_2$ et des ouverts $\Omega_1$ et $\Omega_2$ tels que $K_1 \subseteq A \subseteq \Omega_1$, $K_2 \subseteq B \subseteq \Omega_2$ et

$$m^*(\Omega_1 \setminus K_1) \leqslant \varepsilon\,, \quad m^*(\Omega_2 \setminus K_2) \leqslant \varepsilon.$$

Comme

$$A \setminus B \subseteq \Omega_1 \setminus K_2 \subseteq (\Omega_1 \setminus K_1) \cup (K_1 \setminus \Omega_2) \cup (\Omega_2 \setminus K_2),$$

on obtient :

$$m^*(A \setminus B) \leqslant \varepsilon + m^*(K_1 \setminus \Omega_2) + \varepsilon.$$

Comme $K_1 \setminus \Omega_2$ est un compact contenu dans $A \setminus B$, cela donne le résultat. □

**Corollaire 15** *Si $A$, $B$ sont deux parties quasi-mesurables telles que $m^*(A) < +\infty$ et $m^*(B) < +\infty$, alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont quasi-mesurables.*

**Preuve.** a) $A \setminus B \in \mathscr{QM}$ par le Corollaire 14 ; comme $A$ et $A \setminus B$ sont disjoints, la Proposition 12 donne $A \cup B = A \cup (A \setminus B) \in \mathscr{QM}$.

b) On a $A \setminus B \in \mathscr{QM}$ et $m^*(A \setminus B) \leqslant m^*(A) < +\infty$ ; donc $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathscr{QM}$ par le Corollaire 14. □

### 3.4 Etape 4.

**Définition 16** *On dit que $A \subseteq X$ est <u>mesurable</u> si, pour <u>tout</u> compact $K \subseteq X$, on a $A \cap K \in \mathscr{QM}$.*

*On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des parties mesurables.*

**Proposition 17** *$\mathscr{M}$ est une tribu de parties de $X$ et elle contient la tribu borélienne $\mathscr{B}or(X)$.*

**Preuve.** 1) a) Il est clair que $\emptyset \in \mathscr{M}$.

b) Si $A \in \mathscr{M}$, alors, pour tout compact $K$, on a $m^*(A \cap K) \leqslant m^*(K) < +\infty$. Comme $K \in \mathscr{QM}$, le Corollaire 14 dit que $A^c \cap K = K \setminus (A \cap K) \in \mathscr{QM}$ ; donc $A^c \in \mathscr{M}$.

c) Soit $A_n \in \mathscr{M}$, $n \geqslant 1$, et $A = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} A_n$. Pour tout compact $K$, posons :

$$B_1 = A_1 \cap K\,, \quad B_{n+1} = (A_{n+1} \cap K) \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_n)\,,\ n \geqslant 1.$$

Alors $B_n \in \mathscr{QM}$, par les Corollaire 14 et Corollaire 15 ; et les $B_n$, $n \geqslant 1$, sont deux-à-deux disjoints. La Proposition 12 nous dit que $A \cap K = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} B_n \in \mathscr{QM}$. Ainsi $A \in \mathscr{M}$.

2) Pour tout fermé $F$ et tout compact $K$, $F \cap K$ est compact et donc $F \cap K \in \mathscr{QM}$. Donc $F \in \mathscr{M}$ et, par conséquent, $\mathscr{B}or(X) \subseteq \mathscr{M}$, puisque $\mathscr{M}$ est une tribu. □

**Proposition 18** *$m = {m^*}_{|\mathscr{M}}$ est une mesure positive sur $(X, \mathscr{M})$.*

**Preuve.** Cela résulte de la Proposition 12. □

### 3.5 Etape 5.

**Proposition 19** $L(f) = \int_X f\,dm\,, \quad \forall f \in \mathscr{K}(X)$.

**Preuve.** Il suffit de montrer :

$$L(f) \leqslant \int_X f\,dm\,, \quad \forall f \in \mathscr{K}(X)\,;$$

en effet, on aura l'inégalité inverse en remplaçant $f$ par $(-f)$.

Soit $K = \operatorname{supp}(f)$ et choisissons $a, b \in \mathbb{R}$, avec $b > 0$, tels que $f(K) \subseteq ]a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit :

$$y_0 = a < y_1 < \cdots < y_n < y_{n+1} = b$$

une subdivision de $[a, b]$ de pas inférieur ou égal à $\varepsilon$ : $0 < y_{k+1} - y_k \leqslant \varepsilon$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Définissons :

$$A_k = \{y_{k-1} < f \leqslant y_k\} \cap K\,, \quad 1 \leqslant k \leqslant n+1.$$

Les $A_k$ sont des boréliens (car $f$ est continue) deux-à-deux disjoints ; donc :

$$m(K) = \sum_{k=1}^{n+1} m(A_k).$$

Pour tout $k$, soit $\Omega_k$ un ouvert tel que $A_k \subseteq \Omega_k$ et

$$m(\Omega_k) \leqslant m(A_k) + \frac{\varepsilon}{n+1}\cdot$$

Posons :

$$V_k = \Omega_k \cap \{f < y_k + \varepsilon\}\,;$$

c'est un ouvert et $A_k \subseteq V_k$ ; de plus :

$$m(V_k) \leqslant m(\Omega_k) \leqslant m(A_k) + \frac{\varepsilon}{n+1}\cdot$$

Comme $K \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_{n+1}$, il existe une partition de l'unité de $K$ subordonnée au recouvrement $(V_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$, c'est-à-dire des fonctions $h_1, \ldots, h_n \in \mathscr{K}(X)$ telles que :

$$h_k \prec V_k\,,\ 1 \leqslant k \leqslant n+1\,, \quad \text{et } K \prec \sum_{k=1}^{n+1} h_k.$$

On a alors :

a) $m(K) \leqslant L\Big(\sum_{k=1}^{n+1} h_k\Big)$ (par le Lemme 10) ;

b) $f = \sum_{k=1}^{n+1} h_k f$ ;

c) $h_k f \leqslant (y_k + \varepsilon) h_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n+1$ ;
d) $y_k - \varepsilon \leqslant f(x)$ pour tout $x \in A_k$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned}
L(f) &= \sum_{k=1}^{n+1} L(h_k f) \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} (y_k + \varepsilon) L(h_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (|a| + y_k + \varepsilon) L(h_k) - |a| \sum_{k=1}^{n+1} L(h_k) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n+1} (|a| + y_k + \varepsilon) m(V_k) - |a| m(K) \\
&\qquad \text{(car } |a| + y_k + \varepsilon \geqslant 0) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n+1} (|a| + y_k + \varepsilon) \Big[ m(A_k) + \frac{\varepsilon}{n+1} \Big] - |a| m(K) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (y_k + \varepsilon) m(A_k) + \frac{\varepsilon}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (|a| + y_k + \varepsilon) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n+1} (y_k - \varepsilon) m(A_k) + 2\varepsilon m(K) + \varepsilon(|a| + b + \varepsilon) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \Big[ \int_X f \mathbb{1}_{A_k} \, dm \Big] + \varepsilon [2m(K) + |a| + b + \varepsilon] \\
&= \int_X f \, dm + \varepsilon [2m(K) + |a| + b + \varepsilon] \,,
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. □

### 3.6 Fin de la preuve.

Il ne reste plus qu'à voir que les propriétés ②, ③ ⓐ, ③ ⓑ et ④ sont bien vérifiées. Mais ② et ③ⓐ ont été vus dans la Proposition 9, ③ⓑ dans le Corollaire 13 de la Proposition 12, et ④ résulte de la définition de $m^*$.

Cela achève la preuve du Théorème de representation de Riesz. □

## 4 Annexe : Preuve du Théorème d'Urysohn.

Notons $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_n \,;\ n \geqslant 1\}$, avec $r_1 = 0$ et $r_2 = 1$.

La Proposition 1 permet de trouver un ouvert relativement compact $V_0$ tel que :

$$K \subseteq V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq \Omega,$$

puis un autre ouvert relativement compact $V_1$ tel que :

$$\overline{V}_0 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V}_1 \subseteq \Omega.$$

Pour $n \geqslant 2$, supposons que l'on ait déjà construit des ouverts relativement compacts $V_{r_1}, \ldots, V_{r_n}$ tels que, pour $r_j < r_k$, on ait :

$$K \subseteq V_{r_j} \subseteq \overline{V}_{r_j} \subseteq V_{r_k} \subseteq \overline{V}_{r_k} \subseteq \Omega.$$

Notons :

$$\begin{aligned} r_{inf} &= \max\{r_j \,;\ 1 \leqslant j \leqslant n \text{ et } r_j < r_{n+1}\} \\ r_{sup} &= \min\{r_j \,;\ 1 \leqslant j \leqslant n \text{ et } r_j > r_{n+1}\}. \end{aligned}$$

La Proposition 1 permet à nouveau de trouver un ouvert relativement compact $V_{r_{n+1}}$ tel que :

$$\overline{V}_{r_{inf}} \subseteq V_{r_{n+1}} \subseteq \overline{V}_{r_{n+1}} \subseteq V_{r_{sup}}.$$

Par cette récurrence, un obtient une famille $(V_r)_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]}$ d'ouverts relativement compacts tels que :

$$(*) \quad 0 < r < s < 1 \quad \Rightarrow \quad K \subseteq V_0 \subseteq \overline{V}_0 \subseteq V_r \subseteq \overline{V}_r \subseteq V_s \subseteq \overline{V}_s \subseteq V_1 \subseteq \overline{V}_1 \subseteq \Omega.$$

Définissons $g \colon X \to [0,1]$ par $g(x) = 1$ si $x \notin V_1$ et, pour $x \in V_1$ :

$$g(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \,;\ x \in V_r\}.$$

Il est clair que $g(x) = 0$ si $x \in K$ (car $K \subseteq V_0$), de sorte que si l'on montre que $g$ est continue, la fonction $f = \mathbb{1} - g$ aura les propriétés requises : $f$ sera continue, $f(x) = 1$ si $x \in K$, et $\operatorname{supp}(f) \subseteq \overline{V}_1$ sera compact.

Fixons-nous $x_0 \in X$, et supposons $0 < g(x_0) < 1$ (les cas $g(x_0) = 0$ et $g(x_0) = 1$ ne demandant que des modifications d'écriture). Pour tout $\varepsilon > 0$, choisissons $r, s \in \mathbb{Q}$ tels que $0 < s - r \leqslant \varepsilon$ et :

$$0 < r < g(x_0) < s < 1.$$

Alors, par définition de g et en vertu des inclusions $(*)$, on a $x_0 \in V_s$ et $x_0 \notin \overline{V}_r$ (sinon, on aurait $x_0 \in V_{r'}$ pour $r < r'$, et ce n'est pas possible pour $r' < g(x_0)$). Ainsi l'ouvert $V_s \cap (\overline{V}_r)^c$ contient $x_0$ et l'on a $r \leqslant g(x) \leqslant s$ (et donc $|g(x) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon$) pour tout $x \in V_s \cap (\overline{V}_r)^c$. $\square$