Contrôle continu. Analyse Fonctionnelle

Mardi 23 Octobre 2007

Exercice 1

1) Enoncer le théorème de Stone-Weierstrass (versions réelle et complexe).

2) Soit (K, d) un espace métrique compact. On note $C(K) \otimes C(K)$ le sous-espace vectoriel de $C(K \times K)$, engendré par les fonctions $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$, où $f, g \in C(K)$. Ces espaces sont bien sûr munis de la norme uniforme.

Montrer que $C(K) \otimes C(K)$ est dense dans $C(K \times K)$.

Exercice 2

Soit H un espace de Hilbert réel. On considère une forme bilinéaire a sur H, que l'on suppose continue et coercive, autrement dit:

$$\exists C > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tq } \forall x, y \in H,\ |a(x, y)| \leq C\|x\|.\|y\|$$

et

$$\forall x \in H,\ a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2.$$

1)a) Démontrer qu'il existe un opérateur (continu) T sur H tel que

$$\forall x, y \in H,\ a(x, y) = \langle T(x), y\rangle$$

b) Montrer que $T(H)$ est dense dans H.

c) Montrer que pour tout x dans H, $\|T(x)\| \geq \alpha\|x\|$. En déduire que T est injectif et que $T(H)$ est fermé.

d) En déduire que T est un isomorphisme bicontinu (i.e. T et T^{-1} continus) de H sur lui-même.