Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
MASTER I Mathématiques-Informatique 2005–2006

ANALYSE FONCTIONNELLE

EXAMEN : durée : 4 heures
vendredi 13 janvier 2006

Exercice 1. (3 points : 1+1+1)
Soit $\mathcal{C}^1([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continûment dérivables sur $[0,1]$, muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Soit $D\colon \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ l'application linéaire définie par $D(f) = f'$.

1) Montrer que D n'est pas continue.

2) Montrer que le graphe de D est fermé.

3) Pourquoi cela ne contredit-il pas le Théorème du Graphe fermé ?

Exercice 2. (3 points : 0,5+[1,5+1])
Soit $1 \leqslant p < +\infty$.

1) Donner un exemple d'une fonction (non nulle) $f \in L^p(\mathbb{R})$.

2) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, on pose, pour $n \in \mathbb{Z}$: $f_n(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{2\pi i n x}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement dans $L^p(\mathbb{R})$, mais pas en norme (si $f \neq 0$).

Exercice 3. (5 points : [1+1,5]+0,5+2)
Soit X et Y deux espaces de Banach et $T\colon X \to Y$ une application linéaire continue.

1) a) Montrer que si $T(X)$ est dense dans Y, alors l'adjoint $T^*\colon Y^* \to X^*$ de T est injectif.

b) Réciproquement, montrer que si T^* est injectif, alors $T(X)$ est dense dans Y (*utiliser une conséquence du Théorème de Hahn-Banach, ou bien supposer que $T(X)$ n'est pas dense et utiliser directement le Théorème de Hahn-Banach*).

2) Donner un exemple dans lequel T^* est injectif, mais T n'est pas surjectif (*prendre, par exemple, $X = L^2([0,1])$ et $Y = L^1([0,1])$ ou $X = c_0$ et $Y = \ell_2$*).

3) Montrer que si T est surjectif, alors il existe une constante $C > 0$ telle que $\|T^*(\psi)\| \geqslant C\,\|\psi\|$ pour toute $\psi \in Y^*$.

Exercice 4. (5 points : 1+0,5+1+1+[1+0,5])

1) Montrer que l'application f définie, pour $x \neq 0$, par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

2) On note g la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}$. Calculer sa transformée de Fourier.

3) En déduire la transformée de Fourier-Plancherel de f (*on notera que $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et que, f étant paire, on a $\overline{\mathcal{F}}f = \mathcal{F}f$*).

4) Calculer $(g * g)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

5) a) En déduire que la transformée de Fourier en x de la fonction intégrable $h = f^2$ est $\pi(1 - \pi|x|)\mathbb{1}_{[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}]}(x)$.

b) Donner la valeur de $\|f\|_2$.

Exercice 5. (9 points : 1,5+[0,5+1+1]+1+0,5+[1,5+2])
Soit H un espace de Hilbert réel, et $B\colon H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue (c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|B(x, y)| \leqslant C \|x\| \|y\|$ pour tous $x, y \in H$) et *coercive* (c'est-à-dire qu'il existe une constante $a > 0$ telle que $B(x, x) \geqslant a \|x\|^2$ pour tout $x \in H$).

1) Montrer qu'il existe une application linéaire continue $T\colon H \to H$ telle que $B(x, y) = (Tx \mid y)$ pour tous $x, y \in H$.

2) a) Montrer que $\|Tx\| \geqslant a \|x\|$ pour tout $x \in H$.

b) En déduire que T est injectif et que $T(H)$ est fermé.

c) Montrer que $T(H) = H$.

3) Soit $L\colon H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur H. Montrer qu'il existe un unique $u \in H$ tel que $B(u, y) = L(y)$ pour tout $y \in H$.

On suppose maintenant que B est *symétrique*.

4) Montrer que le produit scalaire défini par B sur H induit une norme $\|\!| \ \|\!|$ équivalente sur H.

5) On pose $J(v) = B(v, v) - L(v)$ pour tout $v \in H$.

Soit C une partie convexe fermée bornée de H. On pose $m = \inf_{v \in C} J(v)$.

a) Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de C qui est faiblement convergente et telle que $\lim_{n \to +\infty} J(v_n) = m$.

b) Si $v_0 = w - \lim_{n \to +\infty} v_n$, montrer que $v_0 \in C$.

c) Montrer que $J(v_0) \leqslant m$ (*utiliser le fait que H est isomorphe à $(H, \|\!| \ \|\!|)$, et donc qu'ils ont la même topologie faible*), et en déduire que $J(v_0) = m$.

* * * * * * * * * * * * * * *