Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
M1 Mathématiques 2006–2007

Examen d'Analyse Fonctionnelle

$2^{\grave{e}me}$ session – lundi 5 mars 2007

durée 4 heures

Exercice 1.

Si $w = (w_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de nombres réels strictement positifs, on note $\ell_2(w)$ l'espace vectoriel de toutes les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres complexes telles que $\sum_{n=1}^{\infty} w_n|x_n|^2 < +\infty$.

1) Montrer que $(x \mid y)_w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n \overline{y}_n$ définit un produit scalaire sur $\ell_2(w)$. On munit $\ell_2(w)$ de la norme associée à ce produit scalaire.

2) Montrer que $i_w \colon x = (x_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2(w) \mapsto (\sqrt{w_n}x_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2$ est un isomorphisme isométrique. En déduire que $\ell_2(w)$ est un espace de Hilbert.

3) a) Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Montrer que A est précompacte si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-espace vectoriel F_ε de E de dimension finie tel que $d(x, F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in A$.

b) Montrer que si $w = (w_n)_{n\geqslant 1}$ et $v = (v_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux suites de nombres réels strictement positifs telles que $w_n/v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors la boule unité fermée de $\ell_2(v)$ est une partie compacte de $\ell_2(w)$.

Exercice 2

On rappelle que l'on note $(f_a)(x) = f(x-a)$, pour $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $x, a \in \mathbb{R}$.

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

1) On suppose que f admet un représentant uniformément continu. Montrer que l'application $\tau_f \colon a \in \mathbb{R} \longmapsto f_a \in L^\infty(\mathbb{R})$ est continue.

2) Réciproquement, on suppose que τ_f est continue en 0.

a) Montrer, en utilisant le Théorème de Fubini, que pour presque tout x de $\mathbb{R}$, on a $|f(x-t) - f(x)| \leqslant \|f_t - f\|_\infty$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

b) Soit $\phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction continue positive paire qui est affine sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$ et telle que $\phi(t) = 0$ pour $|t| \geqslant 1$, et $\phi(0) = 1$; on pose $\phi_n(t) = n\phi(nt)$.

Montrer que $\|f - f * \phi_n\|_\infty \leqslant \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \|f_t - f\|_\infty \phi_n(t)\,dt$ et en déduire que $\tilde{f}_n = f * \phi_n$ converge vers f dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

c) Montrer que $\tilde{f}_n$ est uniformément continue, pour tout $n \geqslant 1$.

d) En déduire que f admet un représentant uniformément continu.

T.S.V.P. ⟶

Exercice 3

Soit E un espace de Banach et $T\colon E \to E$ un opérateur tel que $0 \notin \overline{T(S_E)}$, où $S_E = \{x \in E\,;\ \|x\| = 1\}$.

1) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geqslant c\,\|x\|$ pour tout $x \in E$, et en déduire que $T(E)$ est fermé dans E.

2) En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subseteq T(B_E)$ ($B_E = B(0,1)$ est la boule unité de E).

3) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $T(B_E) \subseteq CB_{T(E)}$, où $B_{T(E)}$ est la boule unité de $T(E)$.

4) En déduire que si T est compact, alors il est de rang fini (c'est-à-dire que $\dim T(E) < +\infty$).

Exercice 4

1) Soit $(c_n)_{n\geqslant 1}$ une suite bornée de nombres complexes, et $T\colon \ell_2 \to \ell_2$ l'opérateur défini par $T(x) = (c_n x_n)_{n\geqslant 1}$, pour tout $x = (x_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2$.

a) Montrer que chaque c_n, $n \geqslant 1$, est une valeur propre de T.

b) Montrer que si $\lambda \notin \overline{\{c_n\,;\ n \geqslant 1\}}$, alors $\lambda \notin \sigma(T)$.

c) En déduire le spectre $\sigma(T)$ de T.

2) Soit K une partie compacte non vide arbitraire de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un opérateur $T \in \mathscr{L}(\ell_2)$ tel que $\sigma(T) = K$.

* * * * * * * * * * * * * * *