

Examen d'Analyse Fonctionnelle *Session 1*

lundi 17 décembre 2007

durée 4 heures

Exercice 1. (4,5 points : 0,5 + [0,5 + 0,5] + [0,5 + 1 + 1 + 0,5]).

Soit H un espace de Hilbert complexe et $T: H \rightarrow H$ une application linéaire continue. On suppose T *auto-adjointe*, c'est-à-dire que $T^* = T$.

1) Montrer que $(Tx | x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$.

On note $S = \sup_{\|x\|=1} (Tx | x)$.

2) a) Montrer que $S \leq \|T\|$.

b) Montrer que $|(Tz | z)| \leq S\|z\|^2$ pour tout $z \in H$.

3) a) Vérifier que pour tous $u, z \in H$ et $a \in \mathbb{C}$, on a :

$$(T(az + u) | az + u) - (T(az - u) | az - u) = 4\operatorname{Re}(T(az) | u).$$

b) En déduire que $|\operatorname{Re}(T(az) | u)| \leq \frac{S}{2} (\|az\|^2 + \|u\|^2)$ (*utiliser l'identité du parallélogramme*).

c) En déduire que $\|Tz\|^2 \leq S\|z\| \|Tz\|$ (*choisir $a \geq 0$ et $u \in H$ de sorte que $\|az\|^2 = \|u\|^2 = \|Tz\| \|z\|$*).

d) En déduire que $S = \|T\|$.

Exercice 2. (4,5 points : 1,5 + [1 + 0,5] + [0,5 + 1])

Soit X un sous-espace fermé de $L^2([0, 1])$ dont chaque élément est aussi dans $L^\infty([0, 1])$.

1) Montrer qu'il existe $C < +\infty$ tel que $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$ pour toute $f \in X$.

2) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ dans X .

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $F_x = \sum_{j=1}^n x_j f_j$.

a) On choisit une partie dénombrable dense D de $\mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe $N \subseteq [0, 1]$ de mesure nulle telle que $|F_x(t)| \leq C\|x\|_2$ pour tout $x \in D$ et tout $t \in [0, 1] \setminus N$.

b) En déduire que $|F_x(t)| \leq C\|x\|_2$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ et tout $t \in [0, 1] \setminus N$.

3) En choisissant x convenablement, montrer que $\sum_{j=1}^n |f_j(t)|^2 \leq C^2$ pour tout $t \in [0, 1] \setminus N$.

4) Qu'en déduit-on quant à la dimension de X ?

T.S.V.P. $\longrightarrow$

Exercice 3. (5 points : 1 + 1 + 1 + 2)

On pose :

$$f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

- 1) Montrer que $g \in L^2(\mathbb{R})$ mais que $g \notin L^1(\mathbb{R})$.
- 2) Calculer $f * f$.
- 3) Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}$.
- 4) On pose $h(x) = 2g(2\pi x)$. Déterminer $\mathcal{F}h$, où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier-Plancherel de $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 4. (6 points : $[0,5 + 0,5] + 0,5 + [0,5 + 1 + 1] + 2$)

Soit H un espace de Hilbert complexe.

- 1) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$.
 - a) Montrer que $\|T\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (x \mid T^*Tx)$.
 - b) En déduire que $\|T^*T\| = \|T\|^2$.
- 2) Montrer que λ est une valeur spectrale de T si et seulement si $\bar{\lambda}$ est une valeur spectrale de T^* .
- 3) On suppose T *auto-adjoint*, c'est-à-dire que $T^* = T$.
 - a) Montrer que $\|T^2\| = \|T\|^2$.
 - b) Calculer $\|T^{2^k}\|$ pour tout entier $k \geq 0$, puis $\|T^n\|$ pour tout entier $n \geq 1$ en fonction de $\|T\|$.
 - c) En déduire le rayon spectral $r(T)$ de T .
- 4) En déduire que si T est auto-adjoint et compact (et $T \neq 0$), alors T possède au moins une valeur propre non nulle.
