Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
22/10/07.
Durée 1h15

Contrôle continu 1
ARITHMÉTIQUE

Les calculatrices et les documents sont interdits.

La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours. (9 points=2+4+3)

1) Rappeler la définition du cardinal d'un ensemble (fini).

2) Soient E un ensemble fini (non vide) et $A \subset E$, non vide. Le but de cette question est de montrer que A est fini et de comparer $card(A)$ et $card(E)$.

a) On suppose que $A' \subset \{1, \ldots, n\}$, où $n \geq 1$. Démontrer que A' est fini et qu'il existe $m \leq n$ tel que $card(A') = m$.

b) Soient $n \geq 1$ et une bijection θ de E sur $\{1, \ldots, n\}$. En considérant $\theta(A)$, démontrer que A est fini. Conclure.

Exercice 1. (4 points=2+2)

Soient A, B des parties d'un ensemble E. Soit $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ tel que $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.

Montrer que : f surjective $\Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

Exercice 2. (7 points=4+3)

Soit E un ensemble (non vide). On veut montrer que

$$E \text{ fini } \Longleftrightarrow \forall P \subset \mathcal{P}(E),\ P \neq \emptyset,\ \text{possède un élément maximal pour l'inclusion.}$$

1) On suppose E est fini. Soit $P \subset \mathcal{P}(E)$, $P \neq \emptyset$. Justifier que $\{card(A) |\, A \in P\}$ admet un plus grand élément et conclure.

2) Etablir la réciproque en considérant l'ensemble des parties finies.