Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.13/01/2012.
Durée 3h

EXAMEN - session **1**
ARITHMÉTIQUE

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours. (4,5 points=1+1+1,5+1)

1) Donner la définition du ppcm de n entiers relatifs, $a_1, \ldots, a_n$, tous non nuls.

2) Énoncer le théorème de Fermat.

3) Rappeler la définition de la fonction φ d'Euler puis en donner la valeur de $\varphi(n)$ en fonction de la décomposition en nombres premiers de n.

4) Quel est le nombre dont la décomposition en fraction continue est $\left[2, 2, 2, \ldots\right] = \left[\bar{2}\right]$?

Exercice 1 : (3 points)

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{15} \\ x \equiv 8 \pmod{28} \end{cases}$

Exercice 2 :(4,5 points=1+(1+1,5)+1)

Soit $n \geq 1$ un entier naturel.

1) Compléter cet énoncé (théorème de Wilson): n est premier si et seulement si n divise $\cdots$

On souhaite prouver ce théorème.

2) On suppose que n est premier. On notera $\overline{a}$ la classe dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'un entier a.

(i) Résoudre l'équation $x^2 = \overline{1}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(ii) Que vaut $\overline{(n-1)!}$? Puis conclure.

3) Prouver la réciproque.

Exercice 3 : (4 points=0,5+1+2,5)

On se propose de montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 5 modulo 6. Par l'absurde on suppose qu'il y en a un nombre fini et on pose $A = \{p \text{ premier} |\, p \equiv 5 \pmod{6}\}$.

1) Montrer que A est non vide.

On note donc $A = \{p_1, \ldots, p_r\}$ avec $r \geq 1$. Posons $N = (6p_1 \ldots p_r) - 1$.

2) Soit q un diviseur de N. Justifier que q et 6 sont premiers entre eux.

3) Montrer qu'il existe q un nombre premier, diviseur de N tel que $q \equiv 5 \pmod{6}$. Conclure.

Exercice 4 : (4,5 points=0,5+1+1+0,5+1,5)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$. On note σ_n l'ensemble des bijections de $\{1, \ldots, n\}$ sur lui-même. On dit que $\sigma \in \sigma_n$ est un dérangement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\sigma(i) \neq i$. On note D_n l'ensemble des dérangements. On cherche à déterminer le cardinal de D_n. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $A_i = \{\sigma \in \sigma_n |\, \sigma(i) = i\}$.

1) Que vaut le cardinal de σ_n?

2) Que vaut le cardinal de A_i?

3) Pour tout k-uplet d'indices $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, déterminer le cardinal de $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$?

4) Comparer D_n et $\displaystyle\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$.

5) En déduire que $\mathrm{card}(D_n) = n! - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \left[(n-k)!\right]$.