Examen-Session 2

ARITHMÉTIQUE

Les calculatrices et les documents sont interdits.

La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours. (3 points=1,5+1,5)

- 1) Démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.
- 2) Soit p un nombre premier. Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$, p divise le coefficient du binôme $C_p^k = \binom{p}{k}$.

Exercice 1. (4,5 points=1+2+1,5)

- 1) Trouver un entier $p \geq 1$ tel que $3^p \equiv 1 \pmod{7}$.
- 2) Le nombre $N = 123443211234$ est-il divisible par 2, par 3, par 6 ? (Justifier sans diviser).
- 3) Quelle est (ou sont) la (ou les) bonne(s) réponse(s) parmi les suivantes et expliquer pourquoi:
 - i) $3^{123443211235} \equiv 1 \pmod{7}$.
 - ii) $3^{123443211235} \equiv 2 \pmod{7}$.
 - iii) $3^{123443211235} \equiv 3 \pmod{7}$.
 - iv) $3^{123443211235} \equiv -4 \pmod{7}$.

Exercice 2. (4 points)

Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $70x + 81y = 3$.

Exercice 3. (5 points=(1+1)+(0,5+1+0,5+1))

On définit la suite de Fibonacci: $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ puis par récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1)a) Montrer que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, pour tout entier $n \geq 1$.

b) En déduire que pour tout entier n , F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

2)a) Montrer que $F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_n F_{m-1}$, pour tous les entiers n et $m \geq 1$.

b) En déduire que $\text{pgcd}(F_{n+m}, F_m) = \text{pgcd}(F_n, F_m)$, pour tous les entiers n et $m \geq 1$.

c) Soient a et b des entiers avec $a > b \geq 1$: $a = bq + r$, où q et r sont des entiers. Montrer que

$$\text{pgcd}(F_a, F_b) = \text{pgcd}(F_b, F_r)$$

d) En déduire que le pgcd de F_n et F_m est $F_{\text{pgcd}(n,m)}$.

Exercice 4. (6,5 points=(0,5+0,5)+1,5+1+(1+2))

Soit E un ensemble dénombrable.

1) Rappeler ce que cela signifie. Justifier que l'on peut noter $E = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$, où les x_n sont distincts.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de E . Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des parties de E de cardinal n .

2) Soit $n \geq 1$. On note θ l'application de $\mathcal{F}_n$ dans $E^n = E \times \dots \times E$, qui à une partie $A = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\}$ (avec $j_1 < \dots < j_n$) associe le n -uplet $(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$. En utilisant θ , montrer que $\mathcal{F}_n$ est dénombrable.

3) Montrer que $\mathcal{F}$ est dénombrable.

4) On suppose que $\mathcal{P}(E)$ est dénombrable.

a) Montrer qu'il existerait alors une application bijective φ de $\mathbb{N}$ sur $\{0, 1\}^E$, l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$.

b) Montrer qu'une telle application φ n'existe pas et conclure.