Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
24/02/10.
Durée 3h

# Examen - session 2
# ARITHMÉTIQUE

*Les calculatrices et les documents sont interdits.*

*La rédaction sera prise en compte dans la notation.*

**Cours et application.** (9 points=(1+2,5+1+1,5)+3)

1)a) Énoncer la règle de d'Alembert pour les séries.

b) Faire la démonstration.

c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Justifier que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge. Sa somme est notée $\exp(x)$.

d) Démontrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$, on a $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.

2) Expliquer le principe du codage RSA (en précisant les mathématiques sur lesquelles il repose).

**Exercice 1.** (2,5 points=1+1,5)

1) Soient $p$ un nombre premier et $x \in \{1, \dots, p-1\}$. A quoi est congru $x^{p-1}$ modulo $p$ ?

2) Trouver le reste de la division euclidienne de $3^{1335}$ par 7.

**Exercice 2.** (4 points)

Déterminer tous les entiers $k \in \mathbb{Z}$ tels que $\qquad 49k \equiv 2\ [180]$.

**Exercice 3.** (5,5 points=2+1+1,5+1)

1) Soit $q \in \mathbb{N}$ avec $q \geq 1$. On suppose que $2^q + 1$ est premier. Montrer que $q$ est une puissance de 2.

Pour tout entier naturel $n$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ (c'est le $n^{ieme}$ nombre de Fermat).

2) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $F_n = 2 + \prod_{j=0}^{n-1} F_j$

3) En déduire que si $n$ et $m$ sont deux entiers avec $n > m$ alors $F_n$ et $F_m$ sont premiers entre eux.

4) En déduire une "nouvelle" démonstration de l'infinitude des nombres premiers.