Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
28/02/11.
Durée 3h

Examen session 2
ARITHMÉTIQUE

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours/application. (6 points=2+1+2+1)

1) Soit p un nombre premier. On fixe $k \in \{1, \dots, p-1\}$. Montrer que p divise $\binom{p}{k}$.

2) Énoncer le (petit) théorème de Fermat.

3) Démontrer ce résultat.

4) Soient $x \in \{1, \dots, p-1\}$ et $s \in \{0, \dots, p-1\}$. Donner l'inverse de $\bar{x}^s$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (pour le produit).

Exercice 1. (3,5 points=1,5+2)

Soit N un entier naturel. On note $\rho(N)$ la somme des chiffres dans son écriture décimale.

1) Montrer que N est divisible par 3 si seulement si $\rho(N) \equiv 0 \quad [3]$.

2) Calculer $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2011000000000000000000000002012}$.

Exercice 2. (4 points=1+(1+0,5)+1,5)

Soient E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et A une partie de E. On note p le cardinal de A.

1) Déterminer le cardinal de l'ensemble des parties $X \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \subset X$.

2) Soit $m \in \{p, \dots, n\}$.

a) Déterminer le cardinal de l'ensemble des parties $Z \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \subset Z$ et $card(Z) = m$.

b) Retrouver le résultat du 1.

3) Déterminer le cardinal de l'ensemble $\Big\{(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) |\ X \cap Y = A\Big\}$.

Exercice 3. (6,5 points=0,5+1+2+1+1,5+0,5)

Dans cet exercice, on cherche à résoudre le problème suivant: un bateau de pirates s'empare d'un coffre de N pièces d'or. Les 17 pirates décident de se répartir les pièces et de donner le reste au cuisinier: celui-ci reçoit 6 pièces. Une bagarre éclate et 6 pirates sont tués: les survivants refont la répartition et le cuisinier se retrouve avec 10 pièces. Une tempête tue ensuite 7 autres pirates et le cuisinier a désormais seulement 3 pièces. Il décide alors d'empoisonner les survivants et de garder le trésor pour lui seul. On sait par ailleurs que le coffre ne pouvait contenir plus de 1000 pièces d'or. On veut connaître N.

1) Préciser des entiers $a, b, c \in \{0, \dots, 16\}$ tels que

$$N \equiv a \quad [17]; \qquad N \equiv b \quad [11]; \qquad N \equiv c \quad [4]$$

.

2) Justifier que nécessairement 44 divise $N + 1$.

3) Trouver deux entiers α et β tels que $1 = 44\alpha + 17\beta$.

4) En déduire un entier $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $n_0 \equiv 6 \quad [17] \qquad$ et $\qquad n_0 \equiv -1 \quad [44]$.

5) En déduire toutes les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n \equiv 6 \quad [17] \qquad$ et $\qquad n \equiv -1 \quad [44]$.

6) Déterminer N.