Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.

EXAMEN - session **1**
ARITHMÉTIQUE
Éléments de correction.

Cours. 4) Comme dans le cours on constate que $x = [\,\bar{2}\,]$ vérifie: $\quad x = 2 + \dfrac{1}{x}$ donc $x^2 - 2x - 1 = 0$ soit $x = 1 + \sqrt{2}$.

Exercice 1 :

On fait comme cela a été vu en cours et en TD. Ici, en appliquant l'algorithme d'Euclide, on trouve une relation de Bézout: $(-13) \times 15 + 7 \times 28 = 1$. Donc comme $8 - 2 = 6$, on a en multipliant la relation par 6:

$$8 - 2 = (-78) \times 15 + 42 \times 28 \qquad \text{donc} \qquad 8 - 42 \times 28 = 2 - 78 \times 15.$$

Ainsi $x_0 = -1168$ est une solution particulière. Puis, on montre (via le fait que 15 et 28 sont premiers entre eux) que l'ensemble des solutions est $\Big\{ -1168 + 15 \times 28k |\ k \in \mathbb{Z} \Big\} = \Big\{ 92 + 420\ell |\ \ell \in \mathbb{Z} \Big\}$.

Exercice 2 :

Cf TD.

Exercice 3 :

1) A contient 5 (et 11, et 17, et 23, et 29, et....).

2) On peut écrire $N = qs$ où $s \in \mathbb{N}$. Ainsi $1 = (6p_1 \dots p_r) - sq$. Cette relation de Bézout implique que q et 6 sont premiers entre eux.

3) $N \geq 2$ admet des diviseurs premiers. Soit m un diviseur premier de N: il ne peut être congru à 0; 2; 3; 4 modulo 6 puisqu'il est premier à 6 (cf 2.). Ainsi m est soit congru à 1, soit congru à 5 modulo 6. Si tous les diviseurs premiers de N étaient congrus à 1 modulo 6 alors leur produit (à n'importe quelle puissance) serait aussi congru à 1 modulo 6 donc N aussi (d'après sa décomposition en nombres premiers). Ceci contredit la définition de N, qui est congru à 5 modulo 6.
Un des diviseurs premiers de N (appelons le q) est congru à 5 modulo 6.
Conclusion: cela signifie que $q \in A$ donc q est des p_i $(1 \leq i \leq r)$. Mais alors q divise N et $(6p_1 \dots p_r)$ donc divise -1 ce qui est impossible.
Cette contradiction implique que A est infini.

Exercice 4 :

1) Cf cours: le cardinal de σ_n vaut $n!$.

2) Le cardinal A_i est clairement égal au cardinal de σ_{n-1} puisque A_i est en bijection avec l'ensemble des permutations sur l'ensemble $\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, qui est un ensemble de cardinal $n - 1$. Ainsi le cardinal de A_i vaut $(n-1)!$.

3) Le cardinal de $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ vaut $(n-k)!$. En effet, $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ est en bijection avec l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$, qui est de cardinal $n - k$.

4) Par définition, D_n est le complémentaire de $\displaystyle\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$ dans σ_n.

5) On a ainsi $\mathrm{card}(D_n) = n! - \mathrm{card}\Big(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i \Big)$. On applique alors la formule du crible:

$$card\Big(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i \Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} card\Big(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} [(n-k)!]$$

Or il y a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ termes dans la somme puisqu'on compte les k-uplets d'entiers $i_1 < \dots < i_k$ compris entre 1 et n.

Finalement, on a bien $\mathrm{card}(D_n) = n! - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \big[(n-k)!\big]$ qui vaut plus simplement $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} (-1)^k$.