Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
Mesure et Intégration (Licence 3 Mathématiques-Informatique)
Daniel Li

Changement de variables dans les intégrales sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$

Daniel Li

April 25, 2006

1 Propriétés de la mesure de Lebesgue.

Rappelons que le Théorème d'unicité des mesures dit qu'il n'y a qu'une seule mesure λ_N sur $\mathbb{R}^N$ telle que :

$$\lambda_N\Big(\prod_{n=1}^{N}[\alpha_n,\beta_n[\Big) = \prod_{n=1}^{N}(\beta_n-\alpha_n)$$

pour tous $\alpha_n \leqslant \beta_n$, $1 \leqslant n \leqslant N$.

On en déduit la propriété importante suivante :

Théorème 1 *La mesure de Lebesgue λ_N sur $\mathbb{R}^N$ est invariante par translation.*

Cela signifie que si $t_a\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ x & \longmapsto & x+a \end{array}$ est la translation par $a \in \mathbb{R}^N$, alors $t_a(\lambda_N) = \lambda_N$.

Autrement dit, si l'on pose, pour $A \subseteq \mathbb{R}^N$:

$$A + a = \{x + a\,;\ x \in A\},$$

alors :

$$\boxed{\lambda_N(A+a) = \lambda_N(A)}$$

pour tout borélien $A \in \mathscr{B}or(\mathbb{R}^n)$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$.

Preuve. Il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}\big(t_a(\lambda_N)\big)\Big(\prod_{n=1}^{N}[\alpha_n,\beta_n[\Big) &= \lambda_N\Big(\prod_{n=1}^{N}[\alpha_n-a_n,\beta_n-a_n[\Big)\\ &= \prod_{n=1}^{N}\big((\beta_n-a_n)-(\alpha_n-a_n)\big) = \prod_{n=1}^{N}(\beta_n-\alpha_n),\end{aligned}$$

et d'utiliser l'unicité rappelée ci-dessus. $\square$

Notation. Dans toute la suite, on notera :

$$\boxed{Q_0 = \big([0,1[\big)^N}.$$

Théorème 2 *Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}^N$ telle que :*
1) μ soit invariante par translation : $\mu(A+a) = \mu(A)$ pour tout borélien $A \in \mathscr{B}or(\mathbb{R}^n)$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$,
2) $\mu(Q_0) = 1$.
Alors $\mu = \lambda_N$.

Preuve. On prendra $N = 2$ pour simplifier l'écriture.
a) Soit $J, K \geqslant 1$ des entiers. Comme :

$$Q_0 = \bigcup_{\substack{1\leqslant j\leqslant J\\ 1\leqslant k\leqslant K}} \Big[\frac{j-1}{J}, \frac{j}{J}\Big[\times \Big[\frac{k-1}{K}, \frac{k}{K}\Big[$$

et que la réunion est disjointe, on a :

$$1 = \mu(Q_0) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant J\\ 1\leqslant k\leqslant K}} \mu\bigg(\Big[\frac{j-1}{J}, \frac{j}{J}\Big[\times \Big[\frac{k-1}{K}, \frac{k}{K}\Big[\bigg).$$

Mais l'invariance par translation donne :

$$\mu\bigg(\Big[\frac{j-1}{J}, \frac{j}{J}\Big[\times \Big[\frac{k-1}{K}, \frac{k}{K}\Big[\bigg) = \mu\bigg(\Big[0, \frac{1}{J}\Big[\times \Big[0, \frac{1}{K}\Big[\bigg) ;$$

donc :

$$1 = JK\, \mu\bigg(\Big[0, \frac{1}{J}\Big[\times \Big[0, \frac{1}{K}\Big[\bigg),$$

soit :

$$\mu\bigg(\Big[0, \frac{1}{J}\Big[\times \Big[0, \frac{1}{K}\Big[\bigg) = \frac{1}{J} \times \frac{1}{K}\,\cdot$$

b) L'invariance par translation, de nouveau, donne maintenant :

$$\mu\bigg(\Big[\frac{l}{J}, \frac{l+1}{J}\Big[\times \Big[\frac{m}{K}, \frac{m+1}{K}\Big[\bigg) = \frac{1}{J} \times \frac{1}{K}$$

pour tous $l, m \in \mathbb{N}$.
c) Si $L, M \geqslant 1$ sont des entiers, on écrit, comme ci-dessus :

$$\Big[\frac{0}{J}, \frac{L}{J}\Big[\times \Big[\frac{0}{K}, \frac{M}{K}\Big[= \bigcup_{\substack{0\leqslant l\leqslant L-1\\ 0\leqslant m\leqslant M-1}} \Big[\frac{l}{J}, \frac{l+1}{J}\Big[\times \Big[\frac{m}{K}, \frac{m+1}{K}\Big[$$

et l'on obtient donc :

$$\mu\bigg(\Big[\frac{0}{J}, \frac{L}{J}\Big[\times \Big[\frac{0}{K}, \frac{M}{K}\Big[\bigg) = LM \times \frac{1}{J} \times \frac{1}{K} = \frac{L}{J} \times \frac{M}{K}\,\cdot$$

Cela signifie que si $r, s \in \mathbb{Q}_+^*$:

$$\mu([0, r[\times[0, s[) = rs.$$

d) Soit $a, b >$ des nombres réels positifs; il existe des nombres $r_n, s_n \in \mathbb{Q}_+^*$ tels que $r_n \nearrow a$ et $s_n \nearrow b$. Alors :

$$\begin{aligned}\mu([0, a[\times[0, b[) &= \mu\Big(\bigcup_{n\geqslant 1}[0, r_n[\times[0, s_n[\Big)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\!\uparrow \mu([0, r_n[\times[0, s_n[) = \lim_{n\to+\infty}\!\uparrow r_n s_n = ab.\end{aligned}$$

e) En utilisant de nouveau l'invariance par translation, on obtient alors, pour tous réels $a < a'$ et $b < b'$:

$$\mu([a, a'[\times[b, b'[) = \mu([0, a'-a[\times[0, b'-b[) = (a'-a)(b'-b).$$

Le Théorème d'unicité donne alors $\mu = \lambda_2$. □

Corollaire 3 *Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}^N$ invariante par translation et telle que $\mu(Q_0) = C < +\infty$. Alors $\mu = C\lambda_N$.*

Preuve. a) Si $C > 0$, il suffit d'appliquer le th'eorème à $(1/C)\mu$.

b) Si $C = 0$, on a, par l'invariance par translation :

$$\mu([k_1, k_1+1[\times\cdots\times[k_N, k_N+1[)\mu(Q_0) = 0.$$

Comme:

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{k_1,\ldots,k_N\in\mathbb{Z}}[k_1, k_1+1[\times\cdots\times[k_N, k_N+1[\,,$$

on obtient $\mu(\mathbb{R}^N) = 0$, c'est-à-dire $\mu = 0$. □

Théorème 4 *Soit $T\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application* **linéaire**. *Alors, pour tout borélien $B \in \mathscr{B}or(\mathbb{R}^N)$, on a :*

$$\boxed{\lambda_N\big(T(B)\big) = |\det T|\,\lambda_N(B)}\,.$$

Remarque 1. En particulier, on a, d'une part :

$$\boxed{\lambda_N(aB) = a^N\lambda_N(B)}$$

pour tout réel $a \geqslant 0$ et tout borélien $B \in \mathscr{B}or(\mathbb{R}^N)$, et d'autre part :

$$\boxed{\boxed{\lambda_N\big(T(B)\big) = |\det(T)|}}\,.$$

On a donc ainsi une *interprétation géométrique* du déterminant d'une application linéaire.

Remarque 2. Si T n'est pas injective, on a $\det(T) = 0$, et donc $\lambda_N\big(T(B)\big) = 0$ pour tout borélien B. C'est normal, puisqu'alors $T(B)$ est contenu dans un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^N$.

Inversement, ce théorème permet de retrouver que tout sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^N$ a une mesure (de Lebesgue N-dimensionnelle) nulle: il suffit de prendre pour T la projection orthogonale sur ce sous-espace vectoriel.

Preuve. a) Posons :

$$\mu(B) = \lambda_N\big(T(B)\,.$$

μ est une mesure positive et invariante par translation (grâce à la linéarité de T). De plus, $T(Q_0)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^N$; donc $\mu(Q_0) = C < +\infty$. Le corollaire précédent permet de conclure que $\mu = C\lambda_N$.

Il s'agit donc de voir que $C = \det(T)$.

b) Notons que la consatante $C = C(T)$ vérifie :

$$\boxed{C(T_1T_2) = C(T_1)C(T_2)}$$

car

$$\begin{aligned} C(T_1T_2)\lambda_N(B) &= \lambda_N\big(T_1T_2(B)\big) = \lambda_N\big(T_1(T_2B)\big) = C(T_1)\lambda_N(T_2B) \\ &= C(T_1)C(T_2)\lambda_N(B). \end{aligned}$$

Elle vérifie aussi $C(Id_{\mathbb{R}^N}) = 1$.

c) Si $T = D$ est un opérateur *diagonal*, c'est-à-dire que sa matrice, dans la base canonique, est de la forme :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_N \end{pmatrix},$$

alors $D(Q_0)$ est un pavé dont les côtés sont de longueur $|d_1|, \ldots, |d_N|$; donc :

$$C(D) = |d_1|\,|d_2|\cdots|d_N| = |d_1 d_2 \cdots d_N| = |\det(D)|\,.$$

d) Si $T = U$ est une *transformation orthogonale* (c'est-à-dire que $U\,{}^tU = {}^tUU = Id_{\mathbb{R}^N}$, soit ${}^tU = U^{-1}$, ou encore que U est une isométrie linéaire), notons :

$$B_N = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N\,;\ x_1^2 + \cdots + x_N^2 < 1\}$$

la boule unité ouverte. Comme U est une isométrie linéaire, on a $U(B_N) = B_N$. Donc :

$$\lambda_N(B_N) = \lambda_N(UB_N) = C(U)\lambda_N(B_N)\,,$$

ce qui entraîne (car $\lambda(B_N) > 0$) que $C(U) = 1$ (rappelons que tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^N$ contient un pavé ouvert non vide et donc $\lambda_N(\Omega) > 0$).

e) Le théorème s'en déduit car toute application linéaire T peut se décomposer en :

$$T = U_1 D U_2\,,$$

où D est diagonal et U_1, U_2 sont orthogonales. $\square$

2 Théorème général de changement de variable.

Rappel. Soit U et V deux ouverts (non vides) de $\mathbb{R}^N$; on dit que $\varphi\colon U \to V$ est un *difféomorphisme de classe mathscrC*^{1} si :

1) φ est bijective ;
2) φ et φ^{-1} ont des *dérivées partielles continues* (ce qui équivaut à dire qu'elles sont continûment différentiables).

Si l'on écrit $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$, le jacobien de φ en $x \in U$ est le déterminant de la matrice jacobienne, c'est-à-dire :

$$J_\varphi(x) = \begin{vmatrix} \partial_1\varphi_1(x) & \cdots & \partial_N\varphi_1(x) \\ \partial_1\varphi_2(x) & \cdots & \partial_N\varphi_2(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_1\varphi_N(x) & \cdots & \partial_N\varphi_N(x) \end{vmatrix} .$$

C'est aussi le déterminant de la *différentielle* de φ en x, c'est-à-dire l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} \varphi'(x) = (d\varphi)(x)\colon & \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & a = (a_n)_{1\leqslant n\leqslant N} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^N a_n \partial_n\varphi(x). \end{array}$$

On a :

Théorème 5 (Théorème de changement de variable.) *Soit U et V deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^N$ et $\varphi\colon U \to V$ un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$. Alors, pour toute fonction $f\colon V \to \mathbb{R}_+$ mesurable positive, on a :*

(CV) $$\boxed{\int_V f(t)\, d\lambda_N(t) = \int_U f\big(\varphi(x)\big)\, |J_\varphi(x)|\, d\lambda_N(x)\,.}$$

De plus, si $f\colon V \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors f est intégrable sur V si et seulement si $(f \circ \varphi)\,|J_\varphi|$ est intégrable sur U, et dans ce cas, l'égalité (CV) est encore valable.

Remarque. Cela revient à dire, en prenant $f = \mathbb{1}_B \circ \varphi^{-1} = \mathbb{1}_{\varphi(B)}$, que, pour tout borélien B de U :

$$\lambda_N\big(\varphi(B)\big) = \int_B |J_\varphi(x)|\, d\lambda_N(x)\,,$$

c'est-à-dire que la mesure-image $\varphi^{-1}(\lambda_N)$ sur U est égale à la mesure $|J_\varphi|.\lambda_N$ de densité $|J_\varphi|$ par rapport à λ_N. Noter aussi que l'on prend la *valeur absolue du jacobien*.

Remarque. On notera que U et V sont des **ouverts**. Si l'on intègre sur une partie D qui n'est pas ouverte, il faut (si l'on peut) se ramener à un ouvert ; par exemple en supprimant un ensemble de mesure nulle.

Exemple important : coordonées polaires dans le plan.

Soit :

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)\,.$$

φ réalise un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de l'ouvert

$$U_0 =]0,+\infty[\times]0,2\pi[$$

sur l'ouvert

$$V_0 = \mathbb{R}^2 \setminus ([0,+\infty[\times\{0\}).$$

Le jacobien est :

$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Bien que $\varphi(U_0) = V_0$ ne soit pas $\mathbb{R}^2$ tout entier, on a :

$$\lambda_2([0,+\infty[\times\{0\}) = 0\,;$$

on peut donc écrire, pour toutes les fonctions f pour lesquelles les intégrales ont un sens :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,d\lambda_2(x,y) = \int_{U_0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\lambda_2(r,\theta)\,,$$

ou, avec des notations plus classiques :

$$\boxed{\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\substack{r>0 \\ 0<\theta<2\pi}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta}\,.$$

Exemple. <u>*Calcul de*</u> $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$.

On a :

$$I^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,dy\right);$$

donc, grâce au Théorème de Fubini-Tonnelli :

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,dxdy\,.$$

Grâce à la remarque ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\mathbb{R}^2\setminus([0,+\infty[\times\{0\})} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,dxdy \\ &= \int_{]0,+\infty[\times]0,2\pi[} \mathrm{e}^{-r^2/2}\,rdrd\theta\,; \end{aligned}$$

d'où, en utilisant à nouveau le Théorème de Fubini-Tonnelli :

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2/2}\, r \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2/2}\, r dr\,,$$

soit, en posant $u = r^2/2$:

$$I^2 = 2\pi \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\, du = 2\pi\,.$$

Par conséquent $\boxed{I = \sqrt{2\pi}}$.

Bien sûr, on peut intégrer aussi en coordonnées polaires sur des ouverts $V \subseteq \mathbb{R}^2$ au lieu de $\mathbb{R}^2$ tout entier, *lorsque cela s'y prête* ; c'est-à-dire lorsque $\varphi(V)$ s'exprime facilement (cela revient à intégrer une fonction de la forme $f = g\mathbb{1}_V$).

Remarque. Il faut bien faire aussi attention à ce que φ soit *bijective*. A titre d'exemple, traiter l'exercice suivant.

Exercice. On pose $\Phi(x,y) = \big(x^2+y^2, \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

1) a) Montrer que $\Phi_1 = \Phi_{|\mathbb{R}\times]0,+\infty[}$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[\times]-1,1[$.

b) Montrer que $\Phi_2 = \Phi_{|\mathbb{R}\times]-\infty,0[}$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}\times]-\infty,0[$ sur le même ouvert $]0,+\infty[\times]-1,1[$.

2) a) Soit μ la mesure de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, et soit $\nu = \Phi(\mu\otimes\mu)$ l'image de $\mu\otimes\mu$ par Φ. Montrer que pour toute fonction mesurable positive $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\, d\nu(x,y) = \int_{]0,+\infty[\times]-1,1[} g(u,v) \frac{\mathrm{e}^{-u/2}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\, dudv$$

(on remarquera que

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\, d\nu(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} (g\circ\Phi)(x,y)\, \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2} \frac{dxdy}{2\pi}$$

puis on écrira $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}\times]0,+\infty[) \cup (\mathbb{R}\times]-\infty,0[) \cup (\mathbb{R}\times\{0\})$.

b) En déduire que $\nu = m_1 \otimes m_2$ s'écrit comme le produit de deux mesures m_1 et m_2, et que ces mesures possèdent chacune une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Le résultat de l'exercice s'interprète de la façon suivante en Probabilités: Si X et Y sont deux variables aléatoires *indépendantes* possédant la loi normale centrée réduite, alors $U = X^2+Y^2$ et $V = X/\sqrt{X^2+Y^2}$ sont aussi indépendantes.

3 Preuve du Théorème de changement de variables.

Cette preuve est due à J.T. Schwartz.

On prouvera d'abord deux lemmes.

Notons $\mathscr{Q}$ l'ensemble de tous les cubes fermés contenus dans l'ouvert U et dont les côtés sont parallèles aux axes.

Lemme 6 *Soit μ et ν deux mesures de Borel positives sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^N$. Si on a :*

$$\mu(Q) \leqslant \nu(Q)\,, \qquad \forall Q \in \mathscr{Q},$$

alors $\mu \leqslant \nu$, c'est-à-dire que :

$$\mu(B) \leqslant \nu(B)\,, \qquad \forall B \in \mathscr{B}or(U).$$

Preuve. L'hypothèse entraîne que l'on a $\mu(Q) \leqslant \nu(Q)$ pour tout cube semi-ouvert $Q = \prod_{n=1}^{N} [a_n, a_n + h[\subseteq U$ $(h > 0)$, car un tel cube est réunion d'une suite croissante de cubes dans $\mathscr{Q}$. Maintenant, tout ouvert $\Omega \subseteq U$ est réunion dénombrable de cubes semi-ouverts du type précédent, deux-à-deux disjoints ; donc $\mu(\Omega) \leqslant \nu(\Omega)$. Comme toute mesure de Borel sur U est régulière, on en déduit que $\mu(B) \leqslant \nu(B)$ pour tout borélien B de U. $\square$

Lemme 7 *Soit $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N) \colon U \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $Q \in \mathscr{Q}$, on a :*

$$\lambda_N\big[\Theta(Q)\big] \leqslant \sup_{\xi \in Q} \|\Theta'(\xi)\|^N \lambda_N(Q)\,,$$

où :

$$\|\Theta'(\xi)\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant N} \sum_{j=1}^{N} |\partial_j \theta_i(\xi)|\,.$$

Preuve. Donnons-nous $\xi, \eta \in Q$ et appliquons le Théorème des accroissements finis : pour chaque $i = 1, \ldots, N$, il existe $\zeta^{(i)} \in [\xi, \eta]$ tel que :

$$\theta_i(\eta) - \theta_i(\xi) = \sum_{j=1}^{N} (\eta_j - \xi_j) \partial_j \theta_i(\zeta^{(i)}).$$

Cela donne :

$$|\theta_i(\eta) - \theta_i(\xi)| \leqslant \sup_{\zeta \in Q} \|\Theta'(\zeta)\|\, h\,,$$

où h est la longueur du côté du cube Q. Cela signifie que $\Theta(\xi)$ et $\Theta(\eta)$ sont dans un cube de côté $\sup_{\zeta \in Q} \|\Theta'(\zeta)\|\, h$, ce qui prouve le Lemme 7. $\square$

Passons maintenant à la preuve proprement dite du théorème.

Il s'agit donc de prouver que, pour tout borélien A de U, on a :

$$\lambda_N\big[\varphi(A)\big] = \int_A |J_\varphi(\xi)|\, d\xi\,.$$

Il suffit en fait de prouver seulement l'<u>*inégalité*</u> :

$$(*)\qquad \lambda_N\big[\varphi(Q)\big] \leqslant \int_Q |J_\varphi(\xi)|\, d\xi\,, \qquad \forall Q \in \mathscr{Q}.$$

En effet, notons λ_U et λ_V les mesures de Lebesgue sur U et $V = \varphi(U)$, et notons $\psi = \varphi^{-1}$. Posons :

$$\mu = \psi(\lambda_V) \quad \text{et} \quad \nu = |J_\varphi|.\lambda_U.$$

L'inégalité $(*)$ s'écrit :

$$\mu(Q) \leqslant \nu(Q)\,, \qquad \forall Q \in \mathscr{Q}.$$

Par le Lemme 6, on a donc $\mu \leqslant \nu$, c'est-à-dire :

$$\psi(\lambda_V) \leqslant |J_\varphi|.\lambda_U.$$

Echangeant les rôles de U et V et de φ et ψ, on aura aussi :

$$\varphi(\lambda_U) \leqslant |J_\psi|.\lambda_V.$$

Composant avec ψ, cela donnera :

$$\lambda_U \leqslant \psi(|J_\psi|.\lambda_V) = (|J_\psi| \circ \varphi).\psi(\lambda_U)\,,$$

d'où :

$$|J_\varphi|.\lambda_U \leqslant \psi(\lambda_V),$$

car $J_\varphi = \dfrac{1}{J_\psi \circ \varphi}\cdot$

On a donc bien obtenu l'égalité $\psi(\lambda_V) = |J_\varphi|.\lambda_U$.

<u>**Preuve de** $(*)$</u>. Soit $Q \in \mathscr{Q}$ et soit $k \geqslant 1$.

Ecrivons Q comme la réunion de k^N autres cubes $Q_i \in \mathscr{Q}$, tous de même taille, et dont les intérieurs sont deux-à-deux disjoints. Comme la frontière d'un cube est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue, on a :

$$\sum_i \lambda_N(Q_i) = \sum_i \lambda_N(\mathring{Q}_i) = \lambda_N\Big(\bigcup_i \mathring{Q}_i\Big) \leqslant \lambda_N(Q) \leqslant \sum_i \lambda_N(Q_i),$$

d'où :

$$\lambda_N(Q) = \sum_i \lambda_N(Q_i).$$

Choisissons $\xi_i \in Q_i$ et posons $\Theta = \big[\varphi'(\xi_i)\big]^{-1} \circ \varphi$.

Par le Lemme 7, on a :

$$\lambda_N\Big(\big[\varphi'(\xi_i)\big]^{-1}\big(\varphi(Q_i)\big)\Big) \leqslant \sup_{\xi\in Q_i} \|\big[\varphi'(\xi_i)\big]^{-1}\circ\varphi'(\xi)\|^N\,\lambda_N(Q_i).$$

Mais l'application $u = \varphi'(\xi_i)$ est <u>*linéaire*</u> (différentielle de φ en ξ_i) ; donc u^{-1} aussi et on obtient :

$$\lambda_N\big(\varphi(Q_i)\big) \leqslant |J_\varphi(\xi_i)| \sup_{\xi\in Q_i} \|\big[\varphi'(\xi_i)\big]^{-1}\circ\varphi'(\xi)\|^N\,\lambda_N(Q_i).$$

Comme φ est de classe $\mathscr{C}^1$, φ' est uniformément continue sur le cube (compact) Q, et donc l'application linéaire $\big[\varphi'(\xi_i)\big]^{-1}\circ\varphi'(\xi)$ est aussi voisine que l'on veut de l'identité, pour ξ et ξ_i assez proches : $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut choisir $k \geqslant 1$ assez grand pour avoir, pour chaque $i = 1, \ldots, k^N$:

$$\sup_{\xi\in Q_i} \|\big[\varphi'(\xi_i)\big]^{-1}\circ\varphi'(\xi)\| \leqslant 1+\varepsilon\,, \qquad \forall \xi_i \in Q_i.$$

On a ainsi :

$$\lambda_N\big(\varphi(Q_i)\big) \leqslant (1+\varepsilon)^N |J_\varphi(\xi_i)|\,\lambda_N(Q_i).$$

Choisissons maintenant $\xi_i \in Q_i$ de telle sorte que :

$$|J_\varphi(\xi_i)|\,\lambda_N(Q_i) = \int_{Q_i} |J_\varphi(\xi)\,d\xi\,,$$

ce qui est possible car $|J_\varphi|$ est continue et car :

$$\inf |J_\varphi(Q_i)| \leqslant \frac{1}{\lambda_N(Q_i)} \int_{Q_i} |J_\varphi(\xi)\,d\xi \leqslant \sup |J_\varphi(Q_i)|.$$

En ajoutant maintenant membre à membre les k^N inégalités précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda_N\big(\varphi(Q)\big) &\leqslant \sum_i \lambda_N\big(\varphi(Q_i)\big)\\ &\leqslant (1+\varepsilon)^N \sum_i \int_{Q_i} |J_\varphi(\xi)|\,d\xi = (1+\varepsilon)^N \int_Q |J_\varphi(\xi)|\,d\xi\end{aligned}$$

(car $\lambda_N(Q) = \sum_i \lambda_N(Q_i)$, c'est-à-dire $\mathbb{1}_Q = \sum_i \mathbb{1}_{Q_i}$ λ_N-presque partout).

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on obtient bien l'inégalité $(*)$. $\square$