Licence de Mathématiques. Université d'Artois.

# INTÉGRATION

## Contrôle Continu 2 du 24 Avril

Un exercice tombera à l'épreuve de contrôle continu.

**Exercice 1.**

Calculer $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \sin(x)\,dx$

**Exercice 2.**

Soit $E$ un compact de la droite réelle. On note comme d'habitude $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\lambda(E)=0$. On fixe $\varepsilon>0$.

1)a) Montrer que $E = \bigcap\limits_{n\geq 1} (E+]-1/n, 1/n[)$.

b) En déduire qu'il existe $\alpha>0$ tel que $\lambda(E+]-\alpha,\alpha[) \leq \varepsilon/2$.

2) En déduire qu'il existe des intervalles ouverts disjoints $I_s$ (pour $s$ décrivant un ensemble $S$) tel que $E \subset \bigcup\limits_{s\in S} I_s$ et $\lambda(\bigcup_{s\in S} I_s) \leq \varepsilon/2$.

*Indication. On pourra utiliser un argument de connexité.*

3) Montrer que $S$ est fini ou dénombrable.

*Indication. On pourra montrer que* $S_k = \{s \in S \mid \lambda(I_s) \geq 1/k\}$ *est fini.*

4) En déduire qu'il existe des intervalles $I'_1, \ldots, I'_N$ ouverts disjoints tels que

$$E \subset \bigcup_{1\leq i\leq N} I'_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{1\leq i\leq N} \lambda(I'_i) \leq \varepsilon$$

.

**Exercice 3.**

Pour $p\in]0,1[$, on pose $F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx$.

1) Montrer que $F(p)$ est bien définie pour tout $p\in]0,1[$ et que $F(p)=F(1-p)$.

2) Montrer que $F : p\in]0,1[\longmapsto F(p)$ est continue. Etudier le comportement en 0 et 1.

3) Montrer que $F$ est $C^1$ sur $]0,1[$. Que vaut $F'$ ?

4) Sans utiliser la question précédente, montrer que $F(p) = \dfrac{1}{p} - 2p\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-p^2}\cdot$ *Indication: on pourra se ramener à une intégrale sur* $[0,1]$ *et faire un dvpt en série entière.*

**Exercice 4.**

On rappelle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e_2\,d\lambda = \sqrt{\pi}$ avec $e_p(t) = \mathrm{e}^{-t^p}$ (où $p>0$). La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est notée $\lambda_n$.

1) Calculer explicitement $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e_2\circ N_2\,d\lambda_n$ où $N_2(X)$ est la norme euclidienne d'un vecteur $X$ de $\mathbb{R}^n$.

2)a) Établir que pour toute fonction continue positive $f$ sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e_1 \circ f \, d\lambda_n = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n | \, f(x) \leq t\}) \, dt$$

*Indication. On remarquera que* $\quad \mathrm{e}^{-a} = \int_a^{\infty} \mathrm{e}^{-t} \, dt.$

3) En déduire le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, i.e. $\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n | \, N_2(x) \leq 1\})$.

**Exercice hors C.C.** Pour s'entraîner...

Il s'agit de démontrer qu'une fonction mesurable bornée $f$, définie sur un segment $[a, b]$ est Riemann intégrable si et seulement l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle (relativement à $\lambda$).

On notera $\omega_f(x) = \inf \Big\{ \sup\limits_V f - \inf\limits_V f | \ V$ est un voisinage de $x$ dans $[a, b] \Big\}$ et, pour $\varepsilon > 0$, $E_\varepsilon = \{x \in [a, b] | \, \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$. L'ensemble des points de discontinuité de $f$ sera noté $D_f$.

Partie I]

1) Montrer que $\omega_f(x) = 0$ si et seulement si $f$ est continue au point $x$.

2) Montrer que $D_f = \bigcup\limits_{n \geq 1} E_{1/n}$.

3) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $E_\varepsilon$ est fermé dans $[a, b]$.

Partie II] On suppose dans cette partie que $f$ est Riemann intégrable sur $[a, b]$. On fixe $\varepsilon > 0$ et $h > 0$.

1) Justifier qu'il existe $s_0 < \ldots < s_{N+1}$ avec $s_0 = a$ et $s_{N+1} = b$ tels que

$$\sum_{j=0}^{N} (s_{j+1} - s_j) \Big( \sup_{[s_j, s_{j+1}]} f - \inf_{[s_j, s_{j+1}]} f \Big) \leq \varepsilon h.$$

On note $J = \{0 \leq j \leq N | \, E_h \cap [s_j, s_{j+1}] \neq \emptyset\}$.

2) Montrer que $\sum\limits_{j \in J} (s_{j+1} - s_j) \leq \varepsilon$ et en déduire que $\lambda(E_h) \leq \varepsilon$.

3) Conclure.

Partie III] On suppose dans cette partie que l'ensemble des points de discontinuité de $f$ est de mesure nulle. On fixe $\varepsilon > 0$.

1) Que vaut $\lambda(E_\varepsilon)$ ? (Justifier !)

En appliquant le résultat de l'exercice 2, on obtient une famille d'intervalles ouverts disjoints $I'_1, \ldots, I'_N$ tels que $E_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{1 \leq i \leq N} I'_i$ et $\sum\limits_{1 \leq i \leq N} \lambda(I'_i) \leq \varepsilon$. Enfin, il existe une famille d'intervalles fermés disjoints $T_1, \ldots, T_R$ tels que $[a, b] \setminus E_\varepsilon = \bigcup\limits_{1 \leq r \leq R} T_r$.

2) Justifier que pour tout $1 \leq r \leq R$ et tout $x \in T_r$, il existe $\alpha_x > 0$ tel que

$$\sup_{]x - \alpha_x, x + \alpha_x[} f - \inf_{]x - \alpha_x, x + \alpha_x[} f \leq \varepsilon.$$

3) En déduire que, pour tout $1 \leq r \leq R$, il existe une subdivision $\Sigma_r = \{c_0, \ldots, c_{p_r+1}\}$ de $T_r$ que

$$\sum_{k=0}^{p_r} (c_{k+1} - c_k) \Big( \sup_{]c_k, c_{k+1}[} f - \inf_{]c_k, c_{k+1}[} f \Big) \leq \varepsilon \lambda(T_r).$$

4) Conclure en montrant qu'il existe une subdivision $\Sigma$ de $[a, b]$ telle que

$$S_\Sigma(f) - s_\Sigma(f) \leq \Big( 2\|f\|_\infty + (b - a) \Big) \varepsilon.$$