# INTÉGRATION
# EXAMEN

**Cours-exercice.** (5,5 points=(1+1,5)+(1+2))

A]1) Définir $L^1(X,\mathcal{T},\mu)$ (noté aussi $L^1(\mu)$ dans le cours) (*on précisera ce que sont les trois objets $X$, $\mathcal{T}$ et $\mu$, sans toutefois redonner leur définition complète*).

2) Démontrer que c'est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).

B] On considère la fonction 1-périodique $f$ définie sur $[-1/2,1/2[$ par $f(x)=|x|$.

1) Calculer les coefficients de Fourier $\hat{f}(n)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$. (*on donnera une expression simplifiée*).

2) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

**Exercice 1.** (2,5 points)

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} x\cos(x^2).\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$

**Exercice 2.** (4 points=2+2)

On considère l'intérieur de la cardioïde $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x^2+y^2\le\sqrt{x^2+y^2}+x\}$.

1) Justifier que $C$ est $\lambda_2$-mesurable et que $\lambda_2(C)$ est fini.

2) Déterminer l'aire de $C$, i.e. calculer $\lambda_2(C)$. *Indication: effectuer un changement de variable en polaire.*

**Exercice 3.** (6 points=2+2+2)

On veut montrer qu'il n'existe pas de suite d'entiers strictement croissante $(n_j)$ telle que $\left(e^{2i\pi n_j x}\right)_j$ converge pour presque tout $x\in[0,1]$. On suppose le contraire et on a donc une suite d'entiers strictement croissante $(n_j)$ telle que $\left(e^{2i\pi n_j x}\right)_j$ converge vers une limite $\ell(x)$ pour presque tout $x\in[0,1]$ (relativement à la mesure de Lebesgue $\lambda$).

1) Montrer que $\ell\in L^\infty([0,1],\lambda)$. Que vaut $\|\ell\|_\infty$ ?

2) Calculer les coefficients de Fourier $\hat{\ell}(n)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

3) En déduire que $\ell=0$ presque partout. Conclure.

**Exercice 4.** (5,5 points=1,5+0,5+1+(1,5+1))

On fixe deux réels $a<b$. Soit $f$ une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

1) On suppose dans cette question qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $D_\alpha=\{t\in[a,b]|\,f(t)\ge\alpha\}$ est dense dans $[a,b]$. Montrer qu'alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\ge\alpha(b-a)$.

On fait désormais l'hypothèse que $f(t)>0$ pour tout $t\in[a,b]$. On veut montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx>0$. Supposons que ce ne soit pas le cas.

2) Que vaut alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ? (Justifier rapidement)

3) Etablir une contradiction en utilisant la notion d'intégrale de Lebesgue.

Dans la suite de l'exercice, on n'utilisera pas la notion d'intégrale de Lebesgue.

4)a) Construire une suite d'intervalles fermés $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui ne sont pas des singletons, telle que $I_{n+1}\subset I_n\setminus D_{\frac{1}{n+1}}$. *Indication: utiliser la question 1.*

b) Conclure.