INTÉGRATION
EXAMEN

Cours-exercice. (5,5 points=(1+1)+(1+2,5))

A]1) Définir ce qu'est un espace de probabilité.

2) Soit X une variable aléatoire réelle. Donner deux expressions pour la variance de X (on précisera auparavant quand elle est définie).

B] On considère la fonction 1-périodique f définie sur $[-1/2, 1/2[$ par $f(x) = x^2$.

1) Calculer les coefficients de Fourier $\hat{f}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. (on donnera une expression simplifiée).

2) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 1. (4 points=2+2)

Etudier

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\mathrm{e}^{-n|\sin(x)|}\right)}{1+x^2+\mathrm{e}^{-nx}}\,dx \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^{1} \frac{\sin\left(\arctan(nx)\right)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Exercice 2. (4 points)

Soient $a, b, c > 0$. Calculer le volume (dans $\mathbb{R}^3$) de la partie (ouverte) de $\mathbb{R}^3$ suivante:

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^{+*})^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\right\}$$

Indication: faire le changement de variables $(r,\theta,\varphi) \longmapsto \Big(ar\cos(\theta)\cos(\varphi), br\sin(\theta)\cos(\varphi), cr\sin(\varphi)\Big)$. On pourra ensuite se rassurer sur le résultat obtenu en vérifiant la cohérence avec le cas $a = b = c$.

Exercice 3. (4,5 points=1,5+1,5+1,5)

On veut montrer qu'il n'existe pas de suite d'entiers strictement croissante (n_j) telle que $\left(\mathrm{e}^{2i\pi n_j x}\right)_j$ converge pour presque tout $x \in [0,1]$. On suppose le contraire et on a donc une suite d'entiers strictement croissante (n_j) telle que $\left(\mathrm{e}^{2i\pi n_j x}\right)_j$ converge vers une limite $\ell(x)$ pour presque tout $x \in [0,1]$ (relativement à la mesure de Lebesgue λ).

1) Montrer que $\ell \in L^\infty([0,1], \lambda)$. Que vaut $\|\ell\|_\infty$?

2) Calculer les coefficients de Fourier $\hat{\ell}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3) En déduire que $\ell = 0$ presque partout. Conclure.

Exercice 4. (3,5 points=1+1,5+1)

On veut montrer qu'il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des boréliens. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence suivante sur $\mathbb{R}$: $x\mathcal{R}y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Par l'axiome du choix, il existe une section S, i.e. une partie $S \subset \mathbb{R}$ telle que toute classe d'équivalence a un unique représentant dans S. On veut montrer que $S \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose donc que $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1) En utilisant, $\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (q + S)$, montrer que $\lambda(S) > 0$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = S \cap [-n, n]$. Montrer que $\lambda(S_n) = 0$. *Indication: on pourra s'intéresser à la réunion des $q + S_n$ quand q décrit l'ensemble des rationnels de $[-n, n]$.*

3) Conclure.