Licence de Mathématiques.
Université d'Artois. 2008-2009.
Session 2.

INTÉGRATION
Éléments de correction

Exercice 1.

1-2-3-4) il suffit d'adapter le corrigé de la session 1. On trouve $I_r = 0$.

5) La fonction $t \mapsto \ln\left|1 - e^{it}\right|$ est continue sur $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$.

Ainsi les intégrales $\displaystyle\int_{-\pi}^{-a} \ln\left|1 - e^{it}\right| dt$ et $\displaystyle\int_{a}^{\pi} \ln\left|1 - e^{it}\right| dt$ sont définies pour tout $a \in]0, \pi[$.
Enfin au voisinage de 0: $\ln\left|1 - e^{it}\right| = \ln|2sin(t/2)| \sim \ln|t|$. Or $t \mapsto \ln|t|$ est intégrable sur $[0, \pi]$ et sur $[-\pi, 0]$.

On utilise le théorème de continuité pour montrer que $r \mapsto I_r$ est continue sur $[0, 1]$. En particulier, $I = I_1 = 0$.

Bien sûr, pour calculer I, on peut faire autrement: par exemple une variante en utilisant le T.C.D. ou bien (mais ce n'était pas la question posée !) utiliser les techniques des questions 1-3.

Exercice 2. 1) $\mathcal{W}$ est un ouvert donc un borélien. Cette partie est incluse dans le disque unité qui est de mesure finie donc $\mathcal{W}$ est de mesure finie. On effectue un changement de variable en polaire.

On obtient: $\lambda_2(\mathcal{W}) = \displaystyle\int_D r\ drd\theta$ où $D = \Big\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times]\alpha - h\pi, \alpha + h\pi[\Big|\ 1 - h < r < 1\Big\}$.
Ainsi

$$\lambda_2(\mathcal{W}) = \int_{\alpha-h\pi}^{\alpha+h\pi} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{1-h}^{1} d\theta = \pi h^2(2 - h).$$

2) Pas de problème de mesurablilité : la fonction est continue. De plus, elle est positive. On peut effectuer le changement de variable: il s'agit d'un C^1 difféomorphisme φ de D sur $\Delta =]1, 2[\times]1, 2[$. De plus le jacobien de φ^{-1} vaut $-\dfrac{1}{3u}\cdot$

Ainsi

$$\int_D f\ d\lambda_2 = \int_\Delta uv^2.|Jac(\varphi^{-1})|\ d\lambda_2 = \int_\Delta uv^2 \cdot \frac{1}{3u}\ d\lambda_2 = \frac{1}{3}\int_\Delta v^2\ d\lambda_2 = \frac{7}{9}\cdot$$

Exercice 3.

1) f_n est continue sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Au voisinage de 1, (avec $x \neq 1$) on a $f_n(x) \sim \dfrac{e^{-1}}{\sqrt{|1 - x^2|}}$.
Or $\dfrac{e^{-1}}{\sqrt{1 - x^2}}$ est intégrable sur $]0, 1[$: on peut invoquer le critère de Riemann au voisinage de

1 car ($f_n(x) \sim \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{2}(1-x)^{1/2}}$ (et $1/2 < 1$) ou tout simplement remarquer qu'une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\arcsin(x)$ qui admet (par continuité) une limite en 1. Le raisonnement s'adapte (attention au signe!) à droite du point 1: $f_n(x) \sim \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{2}(x-1)^{1/2}}$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_1^A f_n(x)\,dx$ convergent (pour tout $A > 1$). Donc $\displaystyle\int_0^A f_n(x)\,dx$ bien définie (pour tout $A > 1$).

Reste à justifier que $\displaystyle\int_A^{+\infty} f_n(x)\,dx$ est bien définie. Or au voisinage de l'infini, f_n est positive (sur $\mathbb{R}^+$ tout entier d'ailleurs) et $f_n(x) \sim \dfrac{\mathrm{e}^{-x^n}}{x} \leq \mathrm{e}^{-x}$ qui est intégrable.

D'où le résultat. De plus, on peut affirmer, puisque les intégrales génralisées convergent, que f_n est bien Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2) Posons $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$ pour $x \in [0,1[$ et $g(x) = f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{|1-x^2|}}$ si $x \in]1,+\infty[$. Enfin $g(1) = 0$ par exemple (c'est sans importance). D'après le 1., g est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

De plus, pour tout $n \geq 1$, on a $|f_n(x)| = f_n(x) \leq g(x)$ presque partout (en fait partout !)

Enfin pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f_n(x) \to 0$ si $x > 1$ (car $x^n \to +\infty$ donc $\mathrm{e}^{-x^n} \to 0$) et $f_n(x) \to \dfrac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$ si $x < 1$ (car $x^n \to 0$).

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, I_n converge donc vers

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}\,dx = \Big[\arcsin(x)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 4.

1) cours: cette intégrale vaut 0.

2)a) Si $x \in B$ pour tout $n \geq 1$, $x \in B_n$ (par décroissance de (B_n)) donc $f_n(x) = f(x)$. Si $x \notin B$ alors il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$: $x \notin B_n$, donc $f_n(x) = 0 = f(x)$.

b) C'est le théorème de convergence dominée de Lebesgue: on a déjà la convergence simple partout et la domination est claire: $|f_n| \leq |f|$, qui est intégrable.

3)a) $B_n = \{|f| \geq n\} = \{\omega \in \Omega |\ |f(\omega)| \geq n\}$ est décroissante. $B = \displaystyle\bigcap_{n\geq 1} B_n = \{|f| = \infty\}$ qui est négligeable (cf cours) donc ceci résulte de 1.

b) Sinon, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une suite B_n telle que $\mu(B_n) \leq 2^{-n}$ et $\displaystyle\int_{B_n} |f|\,d\mu \geq \varepsilon_0$. On peut supposer que (B_n) est décroissante (cf session 1). On en déduit, avec $B = \displaystyle\bigcap_{n\geq 1} B_n$, que $\mu(B) = 0$ et (cf 3b) $\displaystyle\int_B |f|\,d\mu \geq \varepsilon_0 > 0$ ce qui est faux (cf 1.).