Université d'Artois
Licence AR1: Topologie
26 Janvier 2004.
Durée 4h

Examen Analyse Réelle 1

Les calculatrices et les documents sont interdits.

La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Questions de cours - Exercice. (5,5 points=1,5+1+(1+1+1))

1) Soit E un ensemble. On note $\tau = \{\emptyset\} \cup \{\omega \subset E \mid {}^c\omega \text{ est fini}\}$. Montrer que τ est une topologie sur E (on l'appelle topologie de Zariski sur E).

2) Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille (indicée par un ensemble I) d'espaces topologiques (munis chacun d'une topologie τ_i). Quelle est la définition de la topologie produit sur $\prod\limits_{i\in I} E_i$?

3) On munit $\mathbb{N}$ de la topologie de Zariski. On note π la topologie produit (associée) sur $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On note τ_2 la topologie de Zariski sur $\mathbb{N}^2$.

a) Soient a et b deux entiers naturels. Montrer que $\{(a, b)\}$ est un fermé pour la topologie π.

b) En déduire que π est plus fine que τ_2.

c) Est-ce que ces deux topologies sont égales ?

Exercice 2. (5,5 points=0,5+0,5+0,5+0,5+(3+0,5))

Soit (E, d) un espace métrique ($\bar{B}(y, r)$ désigne la boule fermée de centre y et de rayon r).

1) Soit A une partie (non vide) de E. Montrer l'équivalence :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists a_1, \dots, a_n \in A \text{ tels que } A \subset \bigcup_{k=1}^{n} \bar{B}(a_k, \varepsilon) \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists x_1, \dots, x_n \in E \text{ tels que } A \subset \bigcup_{k=1}^{n} \bar{B}(x_k, \varepsilon).$$

On dit qu'une partie A d'un espace métrique est précompacte si elle vérifie les propriétés équivalentes précdentes (si $A = E$, on dit que (E, d) est précompact).

2) Montrer qu'une partie précompacte de E est bornée.

3) Soit $A \subset E$. Montrer que A est précompact si et seulement si $\bar{A}$ est précompact.

4) Soient (F, d') un espace métrique et f une application uniformément continue de E dans F. On suppose que E est précompact. Montrer que $f(E)$ est une partie précompacte de F.

5) a) On suppose que (E, d) est complet et précompact. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E.

i) Construire une suite décroissante de parties infinies $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ et une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la boule de centre c_n et de rayon 2^{-n} contienne $\{a_k \mid k \in I_n\}$ et c_{n+1}.

ii) Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

iii) Conclure que (E, d) est compact.

b) Qu'en est-il de la réciproque ?

Exercice 3. (14,5 points=(1+0,5+1+1+1,5)+(1+0,5+0,5+2+1)+(1+0,5+1+1+1))

Pour X un espace topologique, une extrémité de X est une application ε qui associe à tout compact C, distinct de X, une composante connexe de $X \setminus C$, telle que pour tout compact K : $C \subset K \Rightarrow \varepsilon(K) \subset \varepsilon(C)$.

1) $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie usuelle (associée à la valeur absolue).

a) Soient a et b deux réels avec $a \leq b$. Montrer que $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ a deux composantes connexes que l'on précisera.

Soit ε une extrémité de $\mathbb{R}$. Soit C un compact non vide de $\mathbb{R}$. On note $K = [\min C, \max C]$.

b) Justifier que K est bien défini.

c) Montrer que $\varepsilon(C) \in \{]-\infty, \min C[;]\max C, +\infty[\}$.

Pour fixer les idées, on suppose que $\varepsilon(C) =]\max C, +\infty[$. Soit C' un autre compact non vide de $\mathbb{R}$.

d) Montrer que $\varepsilon(C') =]\max C', +\infty[$. Indication : on pourra considérer $\varepsilon(C \cup C')$.

e) Conclure que $\mathbb{R}$ a deux extrémités.

2) Soit n un entier avec $n \geq 2$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa topologie d'espace vectoriel normé usuelle. Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels (avec $a_i \leq b_i$ pour tout i), on note $K = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$.

Soit ε une extrémité de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus K$ est connexe (on pourra énoncer un argument valable en dimension n et ne le justifier qu'en dimension 2).

b) En déduire $\varepsilon(K)$.

Soit C un compact de $\mathbb{R}^n$.

c) Justifier qu'il existe un pavé compact K (comme ci-dessus) tel que $C \subset K$.

d) Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus C$ a une seule composante connexe non bornée et que c'est $\varepsilon(C)$.

e) Combien $\mathbb{R}^n$ a-t-il d'extrémité ? (Justifier !)

3) Soit X un espace topologique compact ayant au moins deux éléments. On suppose que X admet une extrémité ε. Soit C un compact de X, distinct de X.

a) Montrer que $L = C \cup \overline{\varepsilon(C)}$ est compact.

b) Montrer que $L = X$. Indication : par l'absurde, en considérant $\varepsilon(L)$.

Soient x_1, x_2 deux éléments distincts de X.

c) Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints non vides tels que $C' = X \setminus (U_1 \cup U_2)$ soit un compact, distinct de X.

d) Montrer que $\varepsilon(C') \subset U_1$ ou $\varepsilon(C') \subset U_2$.

e) En déduire que X n'a pas d'extrémité.