Examen TOPOLOGIE

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Questions de cours. (4,5 points=1+1,5+2)

1) Quelle est la définition d'un espace topologique connexe ?
2) Enoncer le théorème de projection sur un convexe fermé, avec la propriété de l'angle obtus.
3)a) Montrer que $f \mapsto \int_0^1 |f(t)|dt$ et $f \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ définissent deux normes sur l'espace vectoriel E des applications continues sur $[0,1]$.
b) Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 1. (5,5 points=1+(2+1+1,5))

On rappelle qu'une partie A d'un espace métrique (E,d) est précompacte si étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de A par des boules fermées de rayon ε (les centres appartiennent a priori à E).
1) Montrer que dans la définition précédente, on peut supposer que les centres des boules appartiennent à A.
2) Soit (E,d) un espace métrique complet et précompact. On veut montrer qu'il est compact. Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de E.
a) Construire une suite décroissante de parties infinies $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ et une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la boule fermée de centre c_n et de rayon 2^{-n} contienne $\{a_k|\, k \in I_n\}$ et c_{n+1}.
b) Que dire de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}(c_n, 2^{-n+1})$?
c) Conclure.

Exercice 2. (4,5 points=1,5+(2+1))

1) On considère $\mathbb{N}$, muni de la topologie grossière et l'identité I sur cet espace. L'ensemble $\{n \in \mathbb{N}|\, I(n) = 0\}$ est-il fermé, est-il dense ?
2) Soient (X,τ) et (X',τ') deux espaces topologiques. On suppose que τ' est séparée. Soient f et g deux applications continues de X dans X'.
a) Montrer que $\{x \in X|\, f(x) = g(x)\}$ est un fermé. Est-ce encore vrai si τ' n'est pas séparée ?
b) On suppose que f et g coïncident sur une partie dense. Montrer que $f = g$. Est-ce encore vrai si τ' n'est pas séparée ?

Exercice 3. (7 points=1,5+(1,5+1+1+2))

1) On considère un produit fini d'espaces topologiques, chacun muni de la topologie discrète. Ce produit est muni de la topologie produit. Montrer que c'est la topologie discrète.
2) Pour $n \geq 1$, on considère $E_n = \{0,1\}$, muni de la topologie discrète. On munit de la topologie produit τ l'espace produit $X = \prod_{n\geq 1} E_n = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$. Un élément x de X est bien sûr de la forme $x = (x_n)_{n\geq 1}$, avec $x_n \in \{0,1\}$.
a) On fixe $x \in X$. Montrer que l'ensemble des parties $V_N = \{y \in X|\, y_n = x_n \text{ pour } 1 \leq n \leq N\}$ (où N décrit $\mathbb{N}^*$) forme une base de voisinages de x.
b) Montrer que τ n'est pas la topologie discrète.
c) Justifier que (X,τ) est un espace métrisable compact.
d) Montrer que l'application θ suivante est bien définie et continue: $\left|\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \end{array}\right.$