Corrigé ENSAE 2000

P. Lefèvre*

Commentaire.

Le thème de ce sujet est les suites basiques dans les espaces de Banach. Il s'agit dans les premières parties d'établir l'existence de telles suites puis une caractérisation dessuites basiques. Pour cela, on démontre au passage le lemme de Baire en utilisant le point de vue un peu inhabituel des jeux topologiques de Choquet, puis le théorème d'isomorphisme de Banach. Enfin, la dernière partie établit un critère pour obtenir des suites basiques équivalentes (ceci permet, par exemple, d'exhiber des bases de Schauder de polynômes dans certains espaces fonctionnels comme l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$).

1 Partie I.

1) S_n est fermée, bornée et $S_n \subset E_n$, qui est de dimension finie (on a une famille génératrice finie) donc S_n est compacte. D'autre part, on a le recouvrement trivial $S_n \subset \bigcup_{z\in S_n} B(z,\delta)$, où $B(z,\delta)$ désigne la boule ouverte de S_n de centre z et de rayon δ.

Par compacité (Borel-Lebesgue), il y a un sous-recouvrement fini : il existe $M\in\mathbb{N}$ et $z_1,\cdots,z_M\in S_n$ tel que $S_n \subset \bigcup_{j=1}^{M} B(z_j,\delta)$. Le résultat s'en déduit immédiatement.

Remarque : l'énoncé admet en fait le théorème de Hahn-Banach.

2) L'application suivante est clairement linéaire : $\theta : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^M \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(x),\cdots,\varphi_M(x)) \end{array}$.

Comme la dimension de E est infinie et que la dimension de $\mathbb{R}^M$ est finie, θ ne peut être injective (sinon, θ enverrait toute famille libre de cardinal $M+1$ dans E sur une famille libre de cardinal $M+1$ dans $\mathbb{R}^M$, ce qui n'existe pas).

Ainsi, $\mathrm{Ker}(\theta)\neq\{0\}$ or $\mathrm{Ker}(\theta)=\bigcap_{1\le j\le M}\mathrm{Ker}\varphi_j$ car, pour $x\in E$, $\theta(x)=0 \Leftrightarrow \forall j\in\{1,\cdots,M\}$, $\varphi_j(x)=0$. Il existe donc un vecteur non nul $\tilde{x}$ dans $\bigcap_{1\le k\le M}\mathrm{Ker}\varphi_k$ et le vecteur $x_{n+1}=\dfrac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}$ convient.

3a) Le vecteur $z=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\in S_n$ par définition donc d'après le 1., il existe $j_0\in\{1,\cdots,M\}$ tel que $\|z_{j_0}-z\|\le\delta$. Comme $x_{n+1}\in\mathrm{Ker}\varphi_{j_0}$ (cf 2.), on a $\varphi_{j_0}(z_{j_0}+\alpha_{n+1}x_{n+1})=\varphi_{j_0}(z_{j_0})=1$. On a donc $1\le\|\varphi_{j_0}\|.\|z_{j_0}+\alpha_{n+1}x_{n+1}\|$. Comme $\|\varphi_{j_0}\|=1$, il vient par l'inégalité triangulaire : $1\le\|z_{j_0}-z\|+\|z+\alpha_{n+1}x_{n+1}\|\le\delta+\|z+\alpha_{n+1}x_{n+1}\|$. On conclut

$$\|\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k x_k\|=\|z+\alpha_{n+1}x_{n+1}\|\ge 1-\delta=\frac{1}{1+\varepsilon}.$$

*Mourad Besbes, P. L.: auteurs du sujet

3b) L'énoncé de le reprécise pas mais il suppose implicitement les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ non nuls. On peut toutefois traiter la question sans en tenir compte. Si tous les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont nuls, la question est triviale. Sinon, un d'entre eux, disons x_{i_1} est non nul et on note alors, en prenant $p = q = i_1$ et $a_{i_1} \neq 0$ et tous les autres a_p nuls dans l'hypothèse, que nécessairement $C \geq 1$.

Pour tous $p, q \in \{1, \cdots, n\}$, l'hypothèse du début de cette partie indique que $\| \sum_{k=1}^{p} a_k x_k \| \leq C \| \sum_{k=1}^{q} a_k x_k \| \leq C(1+\varepsilon) \| \sum_{k=1}^{q} a_k x_k \|$. Si $p = q = n+1$, l'inégalité est triviale.

Il s'agit donc essentiellement de traiter le cas $p \in \{1, \cdots, n\}$ et $q = n+1$. Soient donc $a_1, \cdots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$. On pose $\lambda = \| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \|$.

On affirme que $\lambda \leq (1+\varepsilon) \| \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k \|$.

En effet, ceci est trivial si λ est nul. Sinon, on pose $\alpha_k = \lambda^{-1} a_k$ pour $k \in \{1, \cdots, n+1\}$. On a alors $\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \| = 1$ donc d'après 3.a, on obtient $\| \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k \| \geq \dfrac{1}{1+\varepsilon}$ soit $\| \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k \| \geq \dfrac{\lambda}{1+\varepsilon}$, ce qui était annoncé.

Enfin, on conclut $C(1+\varepsilon) \| \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k \| \geq C \| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \| \geq \| \sum_{k=1}^{p} a_k x_k \|$, la dernière inégalité découlant de l'hypothèse.

4) Soit $\varepsilon(n) > 0$ choisi tel que le produit $\prod_n (1+\varepsilon(n))$ converge (cela signifie que la série $\sum \varepsilon(n)$ converge donc $\varepsilon(n) = n^{-2}$ convient). On pose $K = \prod_n (1+\varepsilon(n))$ et $C_n = \prod_{j=1}^{n} (1+\varepsilon(j))$. On a bien sûr $C_n \leq K$ pour tout n. On fixe $x_1 \in E$ de norme 1.

Supposons $x_1, \cdots, x_n$ construits, avec $\|x_k\| = 1$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, et vérifiant

$$\forall p, q \in \{1, \cdots, n\},\ p \leq q,\ \forall a_1, \cdots, a_q \in \mathbb{R},\ \| \sum_{k=1}^{p} a_k x_k \| \leq C_n \| \sum_{k=1}^{q} a_k x_k \|.$$

On construit alors x_{n+1} comme au 2. et on a d'après 3.b.

$$\forall p, q \in \{1, \cdots, n+1\},\ p \leq q,\ \forall a_1, \cdots, a_q \in \mathbb{R},\ \| \sum_{k=1}^{p} a_k x_k \| \leq C_{n+1} \| \sum_{k=1}^{q} a_k x_k \|.$$

On obtient ainsi par récurrence une suite $(x_n)_n$ de E, de norme 1, vérifiant

$$\forall p, q \in \mathbb{N},\ p \leq q,\ \forall a_1, \cdots, a_q \in \mathbb{R},\ \| \sum_{k=1}^{p} a_k x_k \| \leq C_q \| \sum_{k=1}^{q} a_k x_k \| \leq K \| \sum_{k=1}^{q} a_k x_k \|.$$

La suite (x_n) vérifie donc $(*)$.

2 Partie II.

Question préliminaire. Soit $x \in E_1$. Comme F est dense, il existe une suite $(x_j)_j$ de F qui converge vers x. On a pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, $\|T(x_p) - T(x_q)\| \leq \|T\|.\|x_p - x_q\|$. Comme $(x_j)_j$ est convergente, elle est Cauchy dans E_1 donc d'après l'inégalité précédente, la suite $(T(x_j))_j$ est Cauchy dans E_2. Comme E_2 est un espace de Banach, $(T(x_j))_j$ est convergente dans E_2 vers une limite $y \in E_2$.

Cette limite est indépendante du choix de la suite $(x_j)_j$. En effet, si $x'_j \in F$ converge aussi vers x dans E_1, on a $\|T(x'_j) - T(x_j)\| \leq \|T\|.\|x_j - x'_j\|$, qui tend donc vers 0. Comme $T(x_j)$ converge vers y, on conclut que $T(x'_j)$ converge aussi vers y.

On pose alors $\tilde{T}(x) = y$. On note alors que d'après la remarque précédente, si $x \in F$, $\tilde{T}(x) = T(x)$ (la suite (x_j) constante à x donne le résultat).

On vérifie que $\tilde{T}$ est bien linéaire : pour tous $x, x' \in E_1$, $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$, on a l'existence de suites (x_j) et (x'_j) de F, convergentes respectivement vers x et x'. La suite $(\alpha x_j + \alpha' x'_j)$ est convergente vers $\alpha x + \alpha' x'$ donc $\tilde{T}(\alpha x + \alpha' x')$ est la limite de $T(\alpha x_j + \alpha' x'_j)$ soit de $\alpha T(x_j) + \alpha' T(x'_j)$, limite qui vaut aussi $\alpha T(x) + \alpha' T(x')$.

Quant à la norme : pour tout $x \in E_1$, $\|\tilde{T}(x)\| = \|\lim T(x_j)\| = \lim \|T(x_j)\| \leq \lim \|T\|.\|x_j\| = \|T\|.\|x\|$ (où $x_j \to x$). On en conlut donc que $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Mais, trivialement, $\|\tilde{T}\| \geq \|T\|$ d'où l'égalité des normes.

Enfin, montrons l'unicité de $\tilde{T}$. Supposons que $\check{T} \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, continue, vérifie $\check{T}_{|F} = T$. Pour tout x dans E_1 et toute suite (x_j) de F convergente vers x, la continuité de $\check{T}$ donne $\check{T}(x) = \lim \check{T}(x_j) = \lim T(x_j) = \tilde{T}(x)$. Ainsi $\check{T} = \tilde{T}$.

1) Supposons que $x \in E$ s'écrive $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n x_n$ où les a_i et les a'_i sont des réels. Supposons qu'il existe $i \geq 1$ tel que $a_i \neq a'_i$ et considérons $n_1 = \min\{k |\ a_k \neq a'_k\}$.

D'après $(*)$, pour tout $N \geq n_1$, on a $\|\sum_{k=1}^{n_1}(a_k - a'_k)x_k\| \leq K\|\sum_{k=1}^{N}(a_k - a'_k)x_k\|$. Or $\sum_{k=1}^{N}(a_k - a'_k)x_k = \sum_{k=1}^{N} a_k x_k - \sum_{k=1}^{N} a'_k x_k$ qui converge vers $x - x = 0$ quand N tend vers l'infini. Mais $\sum_{k=1}^{n_1}(a_k - a'_k)x_k = (a_{n_1} - a'_{n_1})x_{n_1}$ donc par passage à la limite sur N, on obtient $(a_{n_1} - a'_{n_1})x_{n_1} = 0$ ie $a_{n_1} = a'_{n_1}$ car $x_{n_1} \neq 0$. Ceci contredit la définition de n_1. D'où le résultat.

2) L'application P_n est bien définie sur H car les a_k sont uniquement déterminés d'après la question précédente. Elle est clairement linéaire et P_n est bien sûr un projecteur : $P_n^2 = P_n$.

Par définition, pour tout $x \in H$, il existe des réels a_k (uniques) tels que $x = \lim_N \sum_{k=1}^{N} a_k x_k$. Or, d'après $(*)$, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $N \geq n$, on a $\|P_n(x)\| = \|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\| \leq K\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_k\|$. En passant à la limite sur N, on obtient $\|P_n(x)\| \leq K\|x\|$. Ainsi, $\|P_n\| \leq K$.

L'image de P_n est incluse dans vect$(x_1, \cdots, x_n)$. Comme $P_n(x_k) = x_k$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, P_n est un projecteur linéaire sur Im(P_n) =vect$(x_1, \cdots, x_n)$.

3) Comme les combinaisons linéaires (finies) sont des sommes nulles à partir d'un certain rang, on a F =vect$\{x_k; k \geq 1\} \subset H$. Tout $x \in H$ est la limite de $\sum_{k=1}^{N} a_k x_k \in F$, où N tend vers l'infini, donc $x \in \bar{F} = G$. Ainsi, $H \subset G$.

F est dense dans G donc, comme $F \subset H \subset G$, H est aussi dense dans G.

D'après la question préliminaire, comme E et G sont des Banach (G est fermé dans un Banach), P_n se prolonge de façon unique en une application linéaire continue $\tilde{P}_n$ de G dans E, avec $\|\tilde{P}_n\| = \|P_n\| \leq K$. Par densité, Im$P_n$ $\subset$Im$\tilde{P}_n \subset \overline{\text{Im}P_n}$; or Im$P_n$ est de dimension finie donc fermé, ainsi ImP_n =Im$\tilde{P}_n$.

On pouvait aussi appliquer la question préliminaire avec E_2 =ImP_n en ayant de toute façon justifier que ImP_n est un Banach (donc que ImP_n est fermé dans E).

Soit $x \in G$. Pour tout $\varepsilon > 0$, par densité, il existe $v \in F \subset H$ tel que $\|x - v\| \leq \varepsilon$. On a alors $\|x - \tilde{P}_n(x)\| \leq \|x - v\| + \|v - \tilde{P}_n(v)\| + \|\tilde{P}_n(v) - \tilde{P}_n(x)\|$. Comme $\|\tilde{P}_n(v) - \tilde{P}_n(x)\| \leq \|\tilde{P}_n\|.\|x - v\| \leq K\varepsilon$, il vient $\|x - \tilde{P}_n(x)\| \leq (K+1)\varepsilon + \|v - P_n(v)\|$, car $v \in H$. Or, par définition, $P_n(v) = v$ pour n assez grand i.e. il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, $P_n(v) = v$. Finalement, $\|x - \tilde{P}_n(x)\| \leq (K+1)\varepsilon$ pour $n \geq n_0$. Ainsi, $\lim \tilde{P}_n(x) = x$.

4) Soit $x \in G$. Pour $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{P}_1(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{N}(\tilde{P}_{n+1}(x) - \tilde{P}_n(x)) = \tilde{P}_{N+1}(x)$, qui converge vers x quand N tend vers l'infini, d'après le 3.

Comme $\mathrm{Im}\tilde{P}_1 = \mathbb{R}x_1$, $\tilde{P}_1(x) = a_1 x_1$ où a_1 est un réel.

Pour tout $v \in H$, on a $\tilde{P}_{n+1}(v) - \tilde{P}_n(v) = P_{n+1}(v) - P_n(v) \in \mathbb{R}x_{n+1}$. Ainsi, comme tout $x \in G$ s'écrit comme une limite d'une suite v_j de H, on a $\tilde{P}_{n+1}(x) - \tilde{P}_n(x) = \lim_j \tilde{P}_{n+1}(v_j) - \tilde{P}_n(v_j) \in \mathbb{R}x_{n+1}$, car c'est une droite vectorielle, donc fermée. On a donc l'existence de $a_{n+1} \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{P}_{n+1}(x) - \tilde{P}_n(x) = a_{n+1}x_{n+1}$.

Ainsi, x est la limite de $a_1x_1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_{n+1}x_{n+1}$ donc, par définition $x \in H$. Finalement $G = H$.

Conclusion : la suite (x_n) est une suite basique.

3 Partie III.

1a) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $V_n \subset U_n$ donc $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$.

D'autre part, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_{n+1}$ et pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $U_{n+1} \subset V_n$ donc $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V_n$.

Finalement, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$.

1b) Il faut commencer par justifier la stratégie de Pierre : le choix $U_{n+1} = V_n \setminus F_n$, pour $n \geq 1$, est acceptable car c'est un ouvert non vide inclus dans V_n. En effet, c'est un ouvert comme intersection de deux ouverts : V_n et le complémentaire de F_n. De plus, U_{n+1} est trivialement inclus dans V_n. Enfin, U_{n+1} est non vide; sinon, $V_n \subset F_n$ or F_n est d'intérieur vide et V_n est un ouvert non vide : contradiction.

Supposons U non vide et prenons $x \in U$. Comme $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$, il existe $m \geq 1$ tel que $x \in F_m$. Comme x est dans tous les U_n, x est en particulier dans $U_{m+1} = V_m \setminus F_m$. Cette contradiction assure que U est vide.

1c) Soit $n \geq 1$. Quel que soit le choix U_n de Pierre, Paul répond que, comme U_n est ouvert, il peut choisir $x_n \in U_n$ et $r_n \in]0, \frac{1}{n}[$ tels que U_n contienne la boule fermée $F_n = \bar{B}(x_n, r_n)$ et Paul joue alors $V_n = B(x_n, r_n)$ (boule ouverte).

On a $F_n \subset U_n \subset V_{n-1} = B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subset F_{n-1}$. Ainsi, la suite (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides. Comme (r_n) tend vers 0, le diamètre de F_n aussi et d'après le théorème des fermés emboîtés (cf. rappel de l'énoncé), on a $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n \neq \emptyset$.

Or $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n = U$ donc U est non vide et Paul gagne.

1d) D'après 1.b et 1.c, comme on ne peut avoir U à la fois vide et non vide, on en déduit q'un espace de Banach (qui est complet) ne peut être réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

2a) Par définition, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} X_n \subset F$. Soit $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = T(x)$ car T est bijective. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|x\| < n$. Par linéarité, y s'écrit $y = nT(\frac{x}{n})$ avec $\|\dfrac{x}{n}\| < 1$. On a donc

$y \in nT(B(0,1)) \subset X_n$.

Finalement $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} X_n = F$.

2b) D'après 1.d., F, qui est un Banach, n'est pas une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. Or les X_n sont des fermés par définition et recouvrent F (cf 2.a) donc il existe $n \geq 1$ tel que $\overset{\circ}{X}_n \neq \emptyset$. Ainsi, il existe $y_1 \in F$ et $r > 0$ tels que $B(y_1, r) \subset n\overline{T(B(0,1))}$. Soient $y_0 = \dfrac{1}{n}y_1$ et $c = \dfrac{r}{2n} > 0$.

Pour tout $z \in B(y_0, 2c)$, $\|nz - y_1\| = n\|z - y_0\| < 2cn = r$ donc $nz \in B(y_1, r) \subset n\overline{T(B(0,1))}$. Ainsi, $z \in \overline{T(B(0,1))}$ et finalement $B(y_0, 2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$.

2c) $T(B(0,1))$ est convexe, symétrique par rapport à 0 donc $\overline{T(B(0,1))}$ aussi. Ainsi, $B(-y_0, 2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$.

D'où, $B(0, 2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$. En effet, pour tout $z \in B(0, 2c)$, on a $(z + y_0) \in B(y_0, 2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$ et $(z - y_0) \in B(-y_0, 2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$ donc, par convexité $z = \dfrac{(z + y_0) + (z - y_0)}{2} \in \overline{T(B(0,1))}$.

2d) Soit $y \in F$ avec $\|y\| < c$ donc $2y \in B(0, 2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$., d'après 2.c. Il existe donc $v \in B(0,1)$ tel que $\|2y - T(v)\| < c$. Ainsi, $z_1 = \dfrac{1}{2}v$ vérifie $\|z_1\| < \dfrac{1}{2}$ et $\|y - T(z_1)\| = \dfrac{1}{2}\|2y - T(v)\| < \dfrac{1}{2}c$.

Supposons $z_1, \cdots, z_{n-1}$ construits avec $\forall 1 \leq j \leq n-1$, $\|z_j\| < \dfrac{1}{2^j}$ et $\|y - T(z_1 + \cdots + z_j)\| < \dfrac{1}{2^j}c$. Posons $\delta_n = y - T(z_1 + \cdots + z_{n-1})$. On a $\|2^n\delta_n\| < 2c$ donc, d'après 2.c, $2^n\delta_n \in \overline{T(B(0,1))}$ et il existe $w \in B(0,1)$ tel que $\|2^n\delta_n - T(w)\| < c$. Ainsi, $z_n = 2^{-n}w$ vérifie $\|z_n\| < \dfrac{1}{2^n}$ et $\|\delta_n - T(z_n)\| < \dfrac{1}{2^n}c$ donc $\|y - T(z_1 + \cdots + z_n)\| < \dfrac{1}{2^n}c$.

Par récurrence, la suite $(z_n)_n$ convient.

2e) La suite (x_n) est Cauchy. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$ donc pour tout $m' \geq m \geq n_0$, $\|x_{m'} - x_m\| = \|\sum\limits_{n=m}^{m'} z_n\| \leq \sum\limits_{n=m}^{m'} \|z_n\| < \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Comme l'espace E est complet, cette suite de Cauchy converge vers une limite $x \in E$.

Par continuité de E, $T(x_n)$ converge vers $T(x)$. Comme $\|y - T(x_n)\| < \dfrac{1}{2^n}c$, qui converge vers 0, il vient par passage à la limite, $y = T(x)$. Comme T est bijective, cela donne $x = T^{-1}(y)$.

2f) On remarque, dans la question précédente, que $\|x_n\| < \|z_1\| + \sum\limits_{j=2}^{n} \dfrac{1}{2^j}$ donc, par passage à la limite sur n, on obtient $\|x\| \leq \|z_1\| + \sum\limits_{j=2}^{\infty} \dfrac{1}{2^j} = \|z_1\| + \dfrac{1}{2}$. Donc $\|x\| < 1$.

$T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ et pour tout $y \in F$ avec $\|y\| < 1$, i.e. $\|cy\| < c$, on a d'après 2.e, $\|T^{-1}(cy)\| < 1$ donc $\|T^{-1}(y)\| < \dfrac{1}{c}$. L'application T^{-1} est donc bornée sur $B(0,1)$ donc T^{-1} est continue. De plus, $\|T^{-1}\| \leq \dfrac{1}{c}$.

4 Partie IV.

Il est clair que A est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $\|.\|_A$ est une norme; l'énoncé admet d'ailleurs ces points. Précisons tout de même que, pour $a=(a_n)$, si $\|a\|_A=0$ alors pour tout N, $\sum_{n=1}^{N} a_n x_n = 0$ et, par passage à la limite $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = 0$. Comme (x_n) est une suite basique, on obtient, par unicité, que tous les a_n sont nuls donc $a=0$.

D'autre part, on remarque que l'unicité dans la définition de suites basiques impose que tous les x_n soient non nuls.

1) Soit $(v^{(p)})_p$ une suite de Cauchy de A : pour tout $\varepsilon>0$, il existe $p_0 \geq 1$ tel que $\forall q \geq p \geq p_0$, $\|v^{(q)}-v^{(p)}\|_A < \varepsilon$, i.e. . Pour tout p, on écrit $v^{(p)} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{(p)} x_n$.

Pour tout N, on a $|v_N^{(q)} - v_N^{(p)}|.\|x_N\| = \|\sum_{n=1}^{N}(v_n^{(q)}-v_n^{(p)})x_n - \sum_{n=1}^{N-1}(v_n^{(q)}-v_n^{(p)})x_n\| \leq 2\|v^{(q)}-v^{(p)}\|_A < 2\varepsilon$. Ainsi, à N fixé, $|v_N^{(q)} - v_N^{(p)}| < 2\varepsilon \|x_n\|^{-1}$ et la suite $(v_N^{(p)})_p$ est une suite de Cauchy de réels donc est convergente vers une limite v_N.

Fixons N et $p \geq p_0$ pour l'instant, $\|\sum_{n=1}^{N}(v_n - v_n^{(p)})x_n\| = \lim_q \|\sum_{n=1}^{N}(v_n^{(q)} - v_n^{(p)})x_n\| \leq \varepsilon$, car pour $q \geq p_0$, $\|\sum_{n=1}^{N}(v_n^{(q)} - v_n^{(p)})x_n\| \leq \|v^{(q)} - v^{(p)}\|_A < \varepsilon$. On obtient donc l'inégalité suivante pour tout $p \geq p_0$:

$$(\mathcal{U}) \qquad\qquad \sup_N \|\sum_{n=1}^{N}(v_n - v_n^{(p)})x_n\| \leq \varepsilon.$$

Montrons que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n x_n$ converge dans E. Fixons $\varepsilon>0$ et p_0 comme précédemment. Comme $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^{(p_0)} x_n$ converge, il existe $N_0 \geq 1$ tel que pour tous $m' \geq m \geq N_0$, $\|\sum_{n=m}^{m'} v_n^{(p_0)} x_n\| < \varepsilon$. On a alors $\|\sum_{n=m}^{m'} v_n x_n\| \leq \|\sum_{n=m}^{m'} v_n^{(p_0)} x_n\| + \|\sum_{n=m}^{m'} (v_n^{(p_0)} - v_n)x_n\|$. Le premier terme est inférieur à ε et le second à $\|\sum_{n=1}^{m'}(v_n^{(p_0)} - v_n)x_n\| + \|\sum_{n=1}^{m-1}(v_n^{(p_0)} - v_n)x_n\| \leq 2\sup_N \|\sum_{n=1}^{N}(v_n^{(p_0)} - v_n)x_n\| \leq 2\varepsilon$, d'après $(\mathcal{U})$.

Finalement, on a établi : pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N_0 \geq 1$ tel que pour tous $m' \geq m \geq N_0$, $\|\sum_{n=m}^{m'} v_n x_n\| \leq 3\varepsilon$. La suite de terme $\sum_{n=1}^{N} v_n x_n$ est donc de Cauchy dans E, complet, donc elle est convergente. Ainsi, $v=(v_n)_n$ est dans A. De plus, l'inégalité $(\mathcal{U})$ s'écrit $\|v - v^{(p)}\|_A \leq \varepsilon$ pour $p \geq p_0$; autrement dit, $(v^{(p)})_p$ converge vers v dans A. On conclut donc que A est un espace de Banach.

2a) Par définition de A et G, l'application Φ est bien définie; de plus, elle est clairement linéaire.

Pour tout $a \in A$, $\|\Phi(a)\| = \|\lim_N \sum_{n=1}^{N} a_n x_n\| = \lim_N \|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\| \leq \sup_N \|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\| = \|a\|_A$. Ainsi, Φ est continue et de norme inférieure à 1. En fait, en prenant $a_1 = 1$ et $a_n = 0$ pour $n \geq 2$, on a $\|\Phi(a)\| = \|a\|_A$ donc $\|\Phi\| = 1$.

Enfin, Φ est bijective car pour tout $w \in G = \bar{F}$, comme la suite (x_n) est basique, il existe une unique suite de réels (a_n) telle que $w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Par définition, $a = (a_n) \in A$ et $\Phi(a) = w$ où a est unique.

2b) D'après III, 2.f, Φ^{-1} est une application linéaire continue de G dans A : il existe $K > 0$ tel que pour tout $a \in A$, $\|a\|_A = \|\Phi^{-1}(\Phi(a))\|_A \leq K\|\Phi(a)\|_G$.

Ainsi, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tous $\alpha_1, \cdots, \alpha_q \in \mathbb{R}$, on pose $a_n = \alpha_n$ si $n \leq q$ et $a_n = 0$ sinon. On obtient $\sup_{1\leq N\leq q} \|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n\| = \|a\|_A \leq K\|\sum_{n=1}^{q} \alpha_n x_n\|$. En particulier, pour tout $p \leq q$, $\|\sum_{n=1}^{p} \alpha_n x_n\| \leq K\|\sum_{n=1}^{q} \alpha_n x_n\|$. Donc la suite vérifie $(*)$.

5 Partie V.

On note $M = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < (2K)^{-1}$.

1a) Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq q$, on fixe $k \in \{p, \cdots, q\}$. Définissons la suite de réels $\alpha_j = a_j$ si $p \leq j \leq q$ et $\alpha_j = 0$ sinon. Comme les (x_n) vérifient $(*)$, on a $\|\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j\| \leq K\|\sum_{j=1}^{q} \alpha_j x_j\|$ et $\|\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j x_j\| \leq K\|\sum_{j=1}^{q} \alpha_j x_j\|$. Ainsi, comme $\|x_k\| = 1$, on obtient $|a_k| = \|\alpha_k x_k\| = \|\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j x_j\|$. On en déduit que $|a_k| \leq \|\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j\| + \|\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j x_j\| \leq 2K\|\sum_{j=1}^{q} \alpha_j x_j\| = 2K\|\sum_{j=1}^{q} a_j x_j\|$.

Comme ceci est vrai pour tout $k \in \{p, \cdots, q\}$ d'où $\max_{p\leq k\leq q} |a_k| \leq 2K\|\sum_{j=1}^{q} a_j x_j\|$.

1b) Supposons que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ converge dans E. D'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k_0 tel que $\forall q \geq p \geq k_0$, $\|\sum_{k=p}^{q} a_k x_k\| \leq \varepsilon$.

On remarque que $\sum_{k=p}^{q} \|x_k - y_k\| < (2K)^{-1}$ et, d'après le 1.a, $\max_{p\leq k\leq q} |a_k| \leq 2K\varepsilon$. On en déduit que $\|\sum_{k=p}^{q} a_k(x_k - y_k)\| \leq \max_{p\leq k\leq q} |a_k|. \sum_{k=p}^{q} \|x_k - y_k\| < \varepsilon$.

Ainsi, $\|\sum_{k=p}^{q} a_k y_k\| \leq \|\sum_{k=p}^{q} a_k x_k\| + \|\sum_{k=p}^{q} a_k(x_k - y_k)\| \leq 2\varepsilon$.

Comme E est complet, ceci implique que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k$ converge dans E.

Réciproquement, supposons que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k$ converge dans E. D'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k_0 tel que $\forall q \geq p \geq k_0$, on ait $\|\sum_{k=p}^{q} a_k y_k\| \leq \varepsilon$ et $\sum_{k\geq k_0} \|x_k - y_k\| \leq (4K)^{-1}$.

On a alors, d'après le 1.a, $\max_{p\leq k\leq q} |a_k| \leq 2K\|\sum_{k=p}^{q} a_k x_k\|$. On en déduit que $\|\sum_{k=p}^{q} a_k(x_k - y_k)\| \leq$

$\max_{p\le k\le q}|a_k|.\sum_{k=p}^{q}\|x_k-y_k\|\le\frac{1}{2}\|\sum_{k=p}^{q}a_kx_k\|$.

Les inégalités $\|\sum_{k=p}^{q}a_kx_k\|\le\|\sum_{k=p}^{q}a_ky_k\|+\|\sum_{k=p}^{q}a_k(x_k-y_k)\|\le\varepsilon+\frac{1}{2}\|\sum_{k=p}^{q}a_kx_k\|$ conduisent à $\|\sum_{k=p}^{q}a_kx_k\|\le 2\varepsilon$.

Comme E est complet, ceci implique que $\sum_{k=1}^{\infty}a_kx_k$ converge dans E.

Remarque 1 : on pouvait éviter d'utiliser le 1.a. en suivant essentiellement la même stratégie mais en justifiant différemment la majoration du terme $\|\sum_{k=p}^{q}a_k(x_k-y_k)\|$. Ainsi, il suffisait de remarquer que $\max_{p\le k\le q}|a_k|$ converge vers 0, car le résultat était alors assuré par la majoration :

$$\|\sum_{k=p}^{q}a_k(x_k-y_k)\|\le\sum_{k=p}^{q}|a_k|.\|x_k-y_k\|\le 2K\max_{p\le k\le q}|a_k|.$$

En effet, si $\sum_{k=1}^{\infty}a_kx_k$ converge dans E, alors a_kx_k converge vers 0 et comme $\|x_k\|=1$, on en déduit que $|a_k|$ tend vers 0. Si $\sum_{k=1}^{\infty}a_ky_k$ converge dans E, alors a_ky_k converge vers 0. Comme $\|x_k-y_k\|$ tend vers 0, et $\|x_k\|=1$, on a nécessairement la convergence de $\|y_k\|$ vers 1 donc $|a_k|$ tend vers 0.

Remarque 2 : on pouvait aussi utiliser une inégalité comme dans la question suivante comparant directement $\|\sum_{k=1}^{\infty}a_kx_k\|$ et $\|\sum_{k=1}^{\infty}a_ky_k\|$ via l'hypothèse $\sum_{k\ge 1}\|x_k-y_k\|<(2K)^{-1}$.

Remarque 3 : on dit alors que les suites (x_n) et (y_n) sont équivalentes.

1c) Fixons $p,q\in\mathbb{N}^*$ avec $p\le q$ et $a_1,\cdots,a_q\in\mathbb{R}$.

$\|\sum_{k=1}^{p}a_ky_k\|\le\|\sum_{k=1}^{p}a_kx_k\|+\max_{1\le k\le p}|a_k|.\sum_{k=1}^{p}\|x_k-y_k\|$. D'après le 1.a, le second terme est majoré par $2KM\|\sum_{k=1}^{p}a_kx_k\|$. Ainsi $\|\sum_{k=1}^{p}a_ky_k\|\le(2KM+1)\|\sum_{k=1}^{p}a_kx_k\|\le 2\|\sum_{k=1}^{p}a_kx_k\|$. Comme (x_n) vérifie $(*)$, on obtient $\|\sum_{k=1}^{p}a_ky_k\|\le 2K\|\sum_{k=1}^{q}a_kx_k\|$.

D'autre part, on majore $\|\sum_{k=1}^{q}a_kx_k\|$ par $\|\sum_{k=1}^{q}a_ky_k\|+\max_{1\le k\le q}|a_k|.\sum_{k=1}^{q}\|x_k-y_k\|\le\|\sum_{k=1}^{q}a_ky_k\|+2KM\|\sum_{k=1}^{q}a_kx_k\|$ d'après 1.a. On obtient $(1-2KM)\|\sum_{k=1}^{q}a_kx_k\|\le\|\sum_{k=1}^{q}a_ky_k\|$ où $1-2KM>0$.

Finalement, il vient $\|\sum_{k=1}^{p}a_ky_k\|\le\frac{2K}{1-2KM}\|\sum_{k=1}^{q}a_ky_k\|$ et (y_n) vérifie $(*)$.

Conclusion : d'après la partie II, la suite (y_n) est une suite basique.

1d) Puisque (x_n) est basique (unicité de l'écriture d'un vecteur de G) et d'après la question 1.b., l'application T est bien définie. Elle est clairement linéaire.

L'application T est continue : pour tout $x\in G$, tout $N\in\mathbb{N}$, en majorant comme au 1.c, on a $\|\sum_{k=1}^{N}a_ky_k\|\le 2\|\sum_{k=1}^{N}a_kx_k\|$. Par passage à la limite sur N, il vient $\|T(x)\|\le 2\|x\|$. Donc $\|T\|\le 2$.

L'application T est bijective : pour tout $y \in Y$, puisque (y_n) est une suite basique, il existe une (unique) famille de scalaires (a_n) telle que $y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k$ donc d'après le 1.b, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ converge vers un $x \in G$. Par définition, $T(x) = y$ et T est surjective. Comme (x_n) est basique, la suite (a_n) telle que $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ est unique donc T est injective.

D'après 2.f., partie III, T^{-1} est aussi continue.

2a) Soit $x \in E(= G)$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ où les a_n sont réels. On a $u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x_k - y_k)$. Pour tout $N \geq 1$, on a $\| \sum_{k=1}^{N} a_k(x_k - y_k)\| \leq \max_{1 \leq k \leq N} |a_k|. \sum_{k=1}^{N} \|x_k - y_k\| \leq 2KM \| \sum_{k=1}^{N} a_k x_k\|$ d'après 1.a. Puis par passage à la limite sur N, on obtient $\|u(x)\| \leq 2KM\|x\|$ donc u est continue et $\|u\| \leq 2KM < 1$.

2b) Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \geq 0$ tel que $\sum_{k \geq N_0} \|u\|^k \leq \varepsilon$ car $\|u\| < 1$ (donc la série géométrique converge). Ainsi, pour tout $x \in E$, tous $q \geq p \geq N_0$, on a $\| \sum_{k=p}^{q} u^k(x)\| \leq \sum_{k \geq N_0} \|u\|^k.\|x\| \leq \varepsilon\|x\|$. Comme E est complet, cela implique que la suite $(\sum_{k=0}^{N} u^k(x))_N$ qui est de Cauchy, est convergente vers une limite $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k(x)$.

S est linéaire : pour tous $x, x' \in E$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, par définition de S et d'après la linéarité de u, on a $S(\lambda x + \lambda' x') = \lim_N \sum_{k=0}^{N} u^k(\lambda x + \lambda' x') = \lim_N \sum_{k=0}^{N} [\lambda u^k(x) + \lambda' u^k(x')] = \lambda S(x) + \lambda' S(x')$.

On a immédiatement $\|S\| \leq \sum_{k \geq 0} \|u\|^k = \dfrac{1}{1 - \|u\|}$.

Enfin, pour tout $x \in E$,

$$S(T(x)) = \lim_N \sum_{k=0}^{N} u^k(x - u(x)) = \lim_N \sum_{k=0}^{N} [u^k(x) - u^{k+1}(x)] = \lim_N [x - u^{N+1}(x)] = x$$

car $u^{N+1}(x)$ converge vers 0. Donc $S \circ T = id$.

D'autre part, par continuité et linéarité de T :

$$T(S(x)) = T(\lim_N \sum_{k=0}^{N} u^k(x)) = \lim_N \sum_{k=0}^{N} T(u^k(x)).$$

Comme $T = id - u$, il vient comme précédemment, $T(S(x)) = \lim_N \sum_{k=0}^{N} [u^k(x) - u^{k+1}(x)] = x$ donc $T \circ S = id$.

2c) Par hypothèse, $Y \subset E$. D'autre part, $T : E \to Y \subset E$ vérifie $T \circ S = id$ (identité de E) donc T est surjective de E sur E. On en déduit $Y = E$.