Corrigé ENSAE 2002

P. Lefèvre*

1 Partie I.

T_n est bien définie par convexité de K.

1) On applique le théorème du point fixe : T_n est $(1-\frac{1}{n})$-contractante et K est complet (car fermé d'un espace de Banach). En fait, x_n est même unique.

2) Pour tout n, $T(x_n) - x_n = \dfrac{1}{n}(a - x_n)$ et la suite $(x_n)_n$ est bornée car K est borné. Ainsi, par passage à la limite, $T(x_n) - x_n$ tend vers 0 et par définition, la suite $(x_n)_n$ est quasi-fixe pour T.

3) La suite $(x_n)_n$ admet une sous-suite convergente $(x_{n_j})_{j\geq 1}$ par compacité de K. Notons x_0 sa limite.

Par ailleurs, T est continue car 1-lipschitzienne (donc uniformément continue). Ainsi, $T(x_{n_j})$ tend vers $T(x_0)$. D'après la question précédente (ou en utilisant le 1. pour $n = n_j$), $T(x_{n_j}) - x_{n_j}$ tend vers 0 donc on en déduit $T(x_0) - x_0 = 0$.

4) On peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \in K$ et que T_n définit bien une application de K dans K, dès qu'on a observé que $d_n \in [0,1]$. En effet, $d_n^2 \leq \max(1, \dfrac{1}{n}) = 1$.

4a) En fait, $d_n > 0$ car $d_n^2 \geq \dfrac{1}{n} > 0$. On applique le théorème du point fixe : T_n est $(1-d_n)$-contractante et K est complet .

4b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n - w_n = (1-d_n)\big(u_n - T(w_n)\big) + d_n(u_n - y_n)$ par définition de w_n dans le a. Puis, en substituant $u_n - y_n = (1-r)(u_n - v_n)$, on obtient

$$u_n - w_n = d_n(1-r)(u_n - v_n) + (1-d_n)\big(u_n - T(u_n)\big) + (1-d_n)\big(T(u_n) - T(w_n)\big).$$

On prend la norme et on a, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\|u_n - w_n\| \leq d_n(1-r)\|u_n - v_n\| + (1-d_n)\|u_n - T(u_n)\| + (1-d_n)\|T(u_n) - T(w_n)\|.$$

puis la définition de d_n implique $\|u_n - T(u_n)\| \leq d_n^2$ et T est une contraction donc

$$\|u_n - w_n\| \leq d_n(1-r)\|u_n - v_n\| + (1-d_n)d_n^2 + (1-d_n)\|u_n - w_n\|$$

d'où $d_n\|u_n - w_n\| \leq d_n(1-r)\|u_n - v_n\| + (1-d_n)d_n^2$. Comme $d_n > 0$, on obtient finalement après simplification

$$\|u_n - w_n\| \leq (1-r)\|u_n - v_n\| + (1-d_n)d_n \leq (1-r)\|u_n - v_n\| + d_n.$$

*Mourad Besbes: auteur du sujet

Par symétrie des rôles joués par les couples (u_n, r) et $(v_n, 1-r)$, on a l'autre inégalité demandée.

4c) On remarque d'abord que d_n tend vers 0 car, par définition de suite quasi-fixe, les quantités $\|u_n - T(u_n)\|$ et $\|v_n - T(v_n)\|$ tendent vers 0. Comme $(1/n)_n$ converge aussi trivialement vers 0, le maximum de ces trois suites converge clairement vers 0.

On en déduit immédiatement la première partie de la question comme au 2. car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $w_n - T(w_n) = d_n\big(y_n - T(w_n)\big)$. Comme K est borné, $\|y_n - T(w_n)\|$ est majoré et $\|w_n - T(w_n)\|$ tend vers 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, via les inégalités de la question précédente,

$$d_n + (1-r)\|u_n - v_n\| \geq \|u_n - w_n\| \geq \|u_n - v_n\| - \|v_n - w_n\| \geq \|u_n - v_n\| - (d_n + r\|u_n - v_n\|).$$

D'où

$$d_n + (1-r)\|u_n - v_n\| \geq \|u_n - w_n\| \geq (1-r)\|u_n - v_n\| - d_n.$$

Par ailleurs, la suite $(\|u_n - v_n\|)_n$ converge vers d. On en déduit alors que la suite $(\|u_n - w_n\|)_n$ converge vers $(1-r)d$. Par symétrie, la suite $(\|v_n - w_n\|)_n$ converge vers rd.

2 Partie II.

1) Commençons par remarquer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, $|x_k^{(n)}| \leq \|x_k\| \leq 1$. En particulier, la suite $\left(x_1^{(n)}\right)_{\mathbb{N}^*}$ est bornée donc admet une sous-suite convergente : il existe une application strictement croissante $\varphi_1 : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $\left(x_1^{(\varphi_1(n))}\right)_{\mathbb{N}^*}$ converge.

Supposons avoir construites les applications $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ pour un certain $k \geq 1$, alors on constate que la suite $\left(x_{k+1}^{(\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k(n))}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée donc admet une sous-suite convergente : il existe une application strictement croissante $\varphi_{k+1} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $\left(x_{k+1}^{(\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_{k+1}(n))}\right)_{\mathbb{N}^*}$ converge. Par récurrence, on a bien le résultat.

2) Notons x_k la limite de la suite $\left(x_k^{(\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k(n))}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ obtenue dans le 1.

Posons $\varphi(n) = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On vérifie que φ est strictement croissante :

$$\varphi(n+1) = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_{n+1}(n+1) = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1))$$

or $\varphi_{n+1}(n+1) \geq n+1 > n$ car pour toute fonction strictement croissante f sur les entiers et à valeurs entières : $f(m) \geq m$. On en déduit alors $\varphi(n+1) > \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n) = \varphi(n)$ (par composition d'applications strictement croissantes).

Dès lors, fixons un entier $k \geq 1$. Pour $n > k$, $x_k^{(\varphi(n))} = x_k^{(\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k(m_n))}$ où $m_n = \varphi_{k+1} \circ \ldots \circ \varphi_n(n)$. En particulier, $m_n \geq n$ donc tend vers l'infini. On a ainsi une sous-suite d'une suite convergente et $\left(x_k^{(\varphi(n))}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge aussi vers x_k.

3) Fixons un entier $p \geq 1$. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} |x_k| = \lim_n \sum_{k=1}^{p} |x_k^{(\varphi(n))}|$ or pour tout n,

$$\sum_{k=1}^{p} |x_k^{(\varphi(n))}| \leq \|x^{(\varphi(n))}\| \leq 1.$$

Donc la série de terme général $|x_k|$ est convergente (à termes positifs et les sommes partielles sont majorées) et sa somme est majorée par 1. Donc $x \in K$.

4) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k_0 > 0$ tel que $\sum\limits_{k=k_0+1}^{\infty} |x_k - z_k| \leq \varepsilon$, car $y - z$ est élément de ℓ^1. Pour tout entier $n \geq 1$, $\|y - z\| \geq \|y^{(n)} - z\| - \|y^{(n)} - y\|$. D'autre part,

$$\|y^{(n)} - z\| - \|y^{(n)} - y\| = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k^{(n)} - z_k| - |y_k^{(n)} - y_k| \geq \Big(\sum_{k=1}^{k_0} |y_k^{(n)} - z_k| - |y_k^{(n)} - y_k| \Big) - \varepsilon$$

car $\sum\limits_{k=k_0+1}^{\infty} |y_k^{(n)} - z_k| - |y_k^{(n)} - y_k| \leq \sum\limits_{k=k_0+1}^{\infty} |x_k - z_k| \leq \varepsilon$.

En passant à la limite sur n, $\sum\limits_{k=1}^{k_0} |y_k^{(n)} - z_k| - |y_k^{(n)} - y_k|$ tend vers $\sum\limits_{k=1}^{k_0} |y_k - z_k|$.

On obtient donc l'existence de N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$,

$$\|y^{(n)} - z\| - \|y^{(n)} - y\| \geq \sum_{k=1}^{k_0} |y_k - z_k| - 2\varepsilon \geq \|y - z\| - 3\varepsilon.$$

On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|y^{(n)} - z\| - \|y^{(n)} - y\| = \|y - z\|$. Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|y^{(n)} - y\| = d$ donc on a le résultat.

5) On utilise la question précédente avec $z = T(y)$ pour en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \|y^{(n)} - T(y)\| = d + \|y - T(y)\|$.

Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$,

$$\|\|y^{(n)} - T(y)\| \leq \|y^{(n)} - T(y^{(n)})\| + \|T(y^{(n)}) - T(y)\| \leq \|y^{(n)} - T(y^{(n)})\| + \|y^{(n)} - y\|.$$

Par hypothèse (la suite $(y^{(n)})_n$ est quasi-fixe), le membre de droite tend vers d. On obtient $d + \|y - T(y)\| \leq d$ donc $y = T(y)$.

6) On construit une suite quasi-fixe comme au I.1 et I.2: $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans K. Dès lors, d'après le II.1-2-3, il existe une suite extraite $\left(x^{(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge ponctuellement vers $y \in K$. La suite de terme $\|x^{(\psi(n))} - y\|$ est clairement bornée par 2 donc il y a une sous-suite convergente vers d. Soit $y^{(n)}$ la suite extraite de $x^{(\psi(n))}$ correspondante, on est sous les hypothèses de la question précédente donc $y = T(y)$.

3 Partie III.

1a) Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Il suffit d'appliquer l'identité du parallélogramme avec $x - x_n$ et $x - x_m$: $= \|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 + \|(x - x_n) - (x - x_m)\|^2 = 2\|x - x_n\|^2 + 2\|x - x_m\|^2$ donc

$$2\|x - x_n\|^2 + 2\|x - x_m\|^2 = \|2x - x_n - x_m\|^2 + \|x_n - x_m\|^2.$$

d'où le résultat.

1b) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\delta_n = \|x - x_n\|^2$. Par hypothèse, la suite (δ_n) converge vers $\delta = \text{dist}(x, C)^2$. On a pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\Big(\delta_n + \delta_m - 2\|x - (x_n + x_m)/2\|^2\Big) \leq 2\Big(\delta_n + \delta_m - 2\delta\Big)$$

car, par convexité de C, $(x_n+x_m)/2 \in C$ donc $\|x-(x_n+x_m)/2\| \geq \mathrm{dist}(x,C)$.

La suite (δ_n) converge donc, en fixant $\varepsilon > 0$, on a l'existence de n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\delta_n \leq \delta + \varepsilon^2$. Ainsi, pour tous $n, m \geq n_0$, $\|x_n - x_m\| \leq 2\varepsilon$ et la suite (x_n) est une suite de Cauchy donc convergente vers une limite $\tilde{x} \in E$ car l'espace E est complet. De plus, comme (x_n) est une suite de C, qui est fermé, $\tilde{x} \in C$. Enfin, par définition, (δ_n) converge vers $\mathrm{dist}(x,C)^2$ et vers $\|x-\tilde{x}\|^2$ d'où $\mathrm{dist}(x,C) = \|x-\tilde{x}\|$.

Montrons qu'il n'y a qu'un point vérifiant cette inégalité. Soit $x' \in C$ tel que $\mathrm{dist}(x,C) = \|x-x'\|$.

Premier argument : considérons $z = (x'+\tilde{x})/2 \in C$, par convexité de C. Avec les notations précédentes, $\|x-z\|^2 \geq \delta$. D'après l'identité du parallélogramme : $2\|x-x'\|^2 + 2\|x-\tilde{x}\|^2 = \|2x - x' - \tilde{x}\|^2 + \|x'-\tilde{x}\|^2$. On en déduit $4\delta = 4\|x-z\|^2 + \|x'-\tilde{x}\|^2 \geq 4\delta + \|x'-\tilde{x}\|^2$. D'où $\|x'-\tilde{x}\| = 0$ et $x' = \tilde{x}$.

Deuxième argument : soit $(x_n)_n$ la suite dont les termes d'indices pairs valent x' et les termes d'indices impairs valent $\tilde{x}$. Alors la suite des $\|x - x_n\|$ est constante à $\mathrm{dist}(x,C)$ et d'après ce qui précède, la suite (x_n) converge. Par unicité de la limite, $x' = \tilde{x}$.

1c) Fixons $z \in C$. Pour tout $t \in]0,1]$, on pose $z_t = (1-t)\tilde{x} + tz$ et $z_t \in C$, par convexité de C. On a $\|x-z_t\|^2 \geq \mathrm{dist}(x,C)^2 = \|x-\tilde{x}\|^2$. En développant $\|x-z_t\|^2 = \|(x-\tilde{x}) + t(\tilde{x}-z)\|^2$, on obtient $t^2\|\tilde{x}-z\|^2 \geq 2t(1-t)\langle x-\tilde{x}, z-\tilde{x}\rangle$. Comme $t > 0$, on simplifie : $t\|\tilde{x}-z\|^2 \geq 2(1-t)\langle x-\tilde{x}, z-\tilde{x}\rangle$. On fait alors tendre vers 0 par valeurs supérieures et on a le résultat.

Enfin, supposons que $x' \in C$ vérifie cette propriété (dite de l'angle obtus) : pour tout $z \in C$, $\langle x-x', z-x'\rangle \leq 0$. On a alors pour tout $z \in C$,

$$\|x-z\|^2 = \|x-x'\|^2 + 2\langle x-x', x'-z\rangle + \|x'-z\|^2 \geq \|x-x'\|^2.$$

D'après la question précédente, x' est alors l'unique point réalisant la distance à C donc $x' = \tilde{x}$.

1d) La propriété de l'angle obtus s'écrit donc : pour tous $x, y \in E$:

Avec $z = P_C(y)$, $\langle x - P_C(x), P_C(y) - P_C(x)\rangle \leq 0$; avec $z = P_C(x)$, $\langle y - P_C(y), P_C(x) - P_C(y)\rangle \leq 0$.

On somme les deux inégalités et on obtient $\langle P_C(y) - P_C(x), x - y + P_C(y) - P_C(x)\rangle \leq 0$. Ainsi, via Cauchy-Schwarz,

$$\|P_C(y) - P_C(x)\|^2 \leq \langle x-y, P_C(y) - P_C(x)\rangle \|x-y\|.\|P_C(y) - P_C(x)\|.$$

Si $\|P_C(y) - P_C(x)\| \neq 0$, on simplifie et on obtient $\|P_C(y) - P_C(x)\| \leq \|y-x\|$; sinon, le résultat est encore trivialement vrai.

2) Commençons par remarquer que F est un convexe fermé (non vide) et que les résultats du 1. peuvent donc s'appliquer.

2a) D'après le 1.b., à $y \in F$ fixé, on écrit la propriété pour $z = P_F(x) + y \in F$ et $z = P_F(x) - y \in F$ (où on utilise que F est un sous-espace vectoriel) pour en déduire $\langle x - P_F(x), y\rangle = 0$ donc $x - P_F(x)$ est dans l'orthogonal de F.

2b) D'abord, F et $F^\perp$ sont clairement en somme directe : si $x \in F \cap F^\perp$, $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0$ car x est orthogonal à lui même.

Soit $x \in E$, il suffit d'écrire $x = P_F(x) + x - P_F(x)$ et de remarquer que $P_F(x) \in F$ par définition et que $x - P_F(x) \in F^\perp$ par 2.a.

2c) Soit $x \in E$, il existe un unique couple $(a,b) \in F \times F^\perp$ tel que $x = a + b$ et l'application qui à x associe a est linéaire. Or d'après la question précédente, $a = P_F(x)$ donc P_F est linéaire.

3a) D'abord les résultats du 2. s'appliquent car le noyau d'une forme linéaire est un sous-espace vectoriel. De plus, la continuité de φ implique que F est fermé.

D'après 2.b., $F^\perp \neq \{0\}$ car sinon $E = F$ et φ serait nulle. Prenons donc x_0 un vecteur non nul de $F^\perp$, qui vérifie alors (comme $x_0 \notin F$) : $\varphi(x_0) \neq 0$. Soit $x \in F^\perp$, $\varphi(x) = k$, on a donc $\varphi\Big(x - \frac{k}{\varphi(x_0)} x_0\Big) = 0$. Donc $x - \frac{k}{\varphi(x_0)} x_0 \in F$ et comme $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel, $x - \frac{k}{\varphi(x_0)} x_0 \in F^\perp$. Finalement, $x - \frac{k}{\varphi(x_0)} x_0 = 0$ donc $x \in \mathbb{R}x_0$. On en conclut que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel non trivial, inclus dans la droite vectorielle engendrée par x_0 donc $F^\perp = \mathbb{R}x_0$.

3b) Posons $\lambda = \dfrac{\varphi(x_0)}{\|x_0\|^2}$.
Soit $x \in E$, il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in F$ tels que $x = ax_0 + b$. On a alors

$$\lambda\langle x, x_0\rangle = \frac{\varphi(x_0)}{\|x_0\|^2}.a\|x_0\|^2 = a\varphi(x_0) = \varphi(x).$$

4 Partie IV.

1) φ est une forme linéaire par linéarité de la limite (par hypothèse, pour tout $u \in E$, la limite existe). De plus, φ est continue car $(x_n)_n$ étant bornée (disons par $k > 0$), on a pour tout $u \in E$, via Cauchy-Schwarz,

$$|\varphi(u)| \leq \sup_n |\langle x_n, u\rangle| \leq \sup_n \|x_n\|\|u\| \leq k\|u\|.$$

D'après le III.3.b. il existe $x_\infty \in E$ tel que pour tout $u \in E$, $\varphi(u) = \langle x_\infty, u\rangle$ (si φ est nulle, alors la conclusion du III.3.b est trivialement vraie avec $\lambda x_0 = x_\infty = 0$). Par définition, cela signifie que $(x_n)_n$ converge faiblement vers x_∞ dans E.

Remarque : on vient d'établir que E est faiblement séquentiellement complet.

2) Soit $u \in E$, il existe un unique couple $(a, b) \in F \times F^\perp$ tel que $x = a + b$ (cf. III.2.b.). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\langle x_n, u\rangle = \langle x_n, a\rangle$ car $x_n \in F$. Donc par hypothèse, la limite de $\langle x_n, u\rangle$ existe et d'après 1., la suite est faiblement convergente.

3) F n'est autre que la fermeture de l'espace vectoriel engendré par les éléments de la suite $(x_n)_n$. En effet, $\mathrm{vect}(x_n)_n \subset F$ donc $\overline{\mathrm{vect}\,\{x_n\}} \subset F$. Réciproquement, $\overline{\mathrm{vect}\,\{x_n\}}$ est un sous-espace vectoriel fermé contenant tous les termes de la suite donc contient F.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_p = \{\sum_{k=1}^{p} a_k x_k |\, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{Q}\}$ qui est dénombrable. Posons, $D = \cup_{p\in\mathbb{N}^*} D_p$ qui est aussi dénombrable, comme réunion dénombrable de parties dénombrables. En fait, D est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des éléments de la suite $(x_n)_n$. Cette partie est dense : soient $y \in F$ et $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $y_1 \in \{\sum_{k=1}^{p} a_k x_k |\, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}\}$ tel que $\|y - y_1\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Puis par densité de $\mathbb{Q}$, il existe $y' \in D_p$ tel que $\|y_1 - y'\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Finalement, $\|y - y'\| \leq \varepsilon$.

4) Soit $c \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|x_n\| \leq c$. La suite $(\langle x_n, y_1\rangle)_n$ est bornée par $c\|y_1\|$, via Cauchy-Schwarz donc on peut en extraire une sous-suite convergente : il existe φ_1 strictement croissante telle que $(\langle x_{\varphi_1(n)}, y_1\rangle)_n$ converge.

Supposons avoir construit $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ strictement croissantes avec $(\langle x_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_k(n)}, y_k\rangle)_n$ convergente, pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$. On considère alors la suite $(\langle x_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_k(n)}, y_{k+1}\rangle)_n$ qui est bornée par $c\|y_{k+1}\|$. On peut en extraire une sous-suite convergente et on obtient ainsi φ_{k+1}.

Enfin, on pose $\varphi(n) = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n > k$, $\langle x_{\varphi(n)}, y_k \rangle = \langle x_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k(m_n)}, y_k \rangle$ où m_n (dépendant de k) tend vers l'infini avec n. On conclut alors que la suite $(\langle x_{\varphi(n)}, y_k \rangle)_n$ converge comme sous-suite d'une suite convergente.

5) Fixons $u \in F$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après 3., il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|y_k - u\| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$, où $M = \sup_n \|x_n\|$. D'après 4., il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tous $n, m \geq n_0$, $|\langle x_{\varphi(n)}, y_k \rangle - \langle x_{\varphi(m)}, y_k \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On obtient alors, via Cauchy-Schwarz,

$$|\langle x_{\varphi(n)}, u \rangle - \langle x_{\varphi(m)}, u \rangle| \leq |\langle x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(m)}, u - y_k \rangle| + |\langle x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(m)}, y_k \rangle| \leq \|x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(m)}\|.\|u - y_k\| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour tous $n, m \geq n_0$, $|\langle x_{\varphi(n)}, u \rangle - \langle x_{\varphi(m)}, u \rangle| \leq M.\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$.

On en déduit que pour tout $u \in F$, la suite $(\langle x_{\varphi(n)}, u \rangle)_n$ est de cauchy donc converge. Conclusion : dans E, de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

5 Partie V.

1) Pour tous $x, y \in E$, en utilisant Cauchy-Schwarz,

$$\langle x - T_1(x) - y + T_1(y), x - y \rangle = \|x-y\|^2 - \langle T_1(x) - T_1(y), x - y \rangle \geq \|x-y\|^2 - \|T_1(x) - T_1(y)\|.\|x-y\| \geq 0$$

car T_1 est une contraction.

2) D'abord, remarquons que la suite $(x_n)_n$ est bornée par hypothèse (En fait, on remarque que de toute façon : $x_n = x_n - T_1(x_n) + T_1(x_n)$ où la suite $(T_1(x_n))_n$ est bornée comme suite de K, qui est borné par hypothèse, et $(x_n - T_1(x_n))_n$ est bornée car convergente).

Soient $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et $v \in E$. D'après $(**)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\langle x_n - T_1(x_n) - (x_\infty + \lambda v) + T_1(x_\infty + \lambda v), x_n - (x_\infty + \lambda v) \rangle \geq 0.$$

Soit

$$\langle x_n - T_1(x_n) - z, x_n - (x_\infty + \lambda v) \rangle + \langle z - (x_\infty + \lambda v) + T_1(x_\infty + \lambda v), x_n - (x_\infty + \lambda v) \rangle \geq 0.$$

Or, par définition de la faible convergence, $\langle z - (x_\infty + \lambda v) + T_1(x_\infty + \lambda v), x_n - (x_\infty + \lambda v) \rangle$ tend vers $\langle z - (x_\infty + \lambda v) + T_1(x_\infty + \lambda v), -\lambda v \rangle$.

D'autre part, $|\langle x_n - T_1(x_n) - z, x_n - (x_\infty + \lambda v) \rangle| \leq \|x_n - T_1(x_n) - z\|.\|x_n - (x_\infty + \lambda v)\|$, où $\|x_n - T_1(x_n) - z\|$ converge vers 0 et $\|x_n - (x_\infty + \lambda v)\|$ est borné.

Finalement, on a donc par passage à la limite, $\lambda \langle z - (x_\infty + \lambda v) + T_1(x_\infty + \lambda v), v \rangle \leq 0$. Comme $\lambda > 0$, on a donc

$$\langle z - (x_\infty + \lambda v) + T_1(x_\infty + \lambda v), v \rangle \leq 0.$$

En prenant la limite quand λ tend vers 0^+, on a par continuité du produit scalaire et de T_1 (qui est continue car 1-lipschitzienne) : $\langle z - x_\infty + T_1(x_\infty), v \rangle \leq 0$. Enfin, en choisissant $v = z - x_\infty + T_1(x_\infty)$, on obtient $\|z - x_\infty + T_1(x_\infty)\|^2 \leq 0$ d'où le résultat.

3) On pose $T_1 = T \circ P_K$ qui est une application de E dans K. C'est une contraction, comme composée de deux contractions. D'après I.1.et I.2., il existe une suite $(x_n)_n$ quasi-fixe pour T d'éléments de K. Comme cette suite est bornée (puisque dans K par définition), d'après IV, on peut en extraire une sous-suite (que l'on appellera encore $(x_n)_n$) faiblement convergente vers $x_0 \in E$. On a $x_n - T_1(x_n) = x_n - T(x_n)$ qui converge donc vers $z = 0$. D'après 2., on a donc $x_0 - T_1(x_0) = 0$. En particulier, $x_0 = T_1(x_0)$ est dans l'image de T_1 donc dans celle de T, donc dans K; ainsi, $P_K(x_0) = x_0$ et $x_0 = T(x_0)$.

4) F est non vide d'après la question précédente. C'est un fermé de K comme image réciproque par l'application $Id_K - T$ (qui est continue) du fermé $\{0\}$. Comme K est fermé dans E, c'est aussi un fermé de E.

Montrons que c'est un convexe. Soient $u \neq v \in F$. Soit $x = tu + (1-t)v \in [u, v]$, avec $t \in [0, 1]$. Comme $u = T(u)$ et $v = T(v)$, on a, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\|u - v\| \leq \|u - T(x)\| + \|T(x) - v\| = \|T(u) - T(x)\| + \|T(x) - T(v)\|.$$

Comme T est une contraction, on en déduit

$$\|u - v\| \leq \|u - T(x)\| + \|T(x) - v\| \leq \|u - x\| + \|x - v\| = \|u - v\|.$$

Ainsi, toutes les inégalités sont des égalités. En particulier, on a égalité dans l'inégalité triangulaire donc $u - T(x)$ et $T(x) - v$ sont colinéaires et de même sens : il existe $\alpha > 0$ tel que $u - T(x) = \alpha(T(x) - v)$, soit $T(x) = t'u + (1 - t')v$ avec $t' = \dfrac{1}{\alpha + 1} \in [0, 1]$. De plus, $\|T(x) - v\| = \|x - v\|$ (et $\|u - T(x)\| = \|u - x\|$) donc $t = t'$. Ainsi $T(x) = x$ et $x \in F$.

5) F est un convexe fermé non vide, inclus dans K donc borné. Remarquons que F est stable par T' : soit $x \in F$, $T(T'(x)) = T \circ T'(x) = T' \circ T(x) = T'(T(x)) = T'(x)$ par hypothèse donc $T'(x) \in F$.

Considérons alors l'application : $\tau : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & T'(x) \end{array}$.

C'est une contraction car T' en est une. D'après 2., τ admet un point fixe, qui est alors un point fixe commun à T et T'.