Capes de Mathématiques.
Université d'Artois
P. Lefèvre.

Problème en classe.

<u>Théorème de Bernstein.</u>

Il s'agit de donner une preuve, due à Bernstein, du Théorème de Weierstraß: toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Dans tout le problème, on considère des espaces de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ finis[1]. Comme d'habitude, on notera $\mathbb{P}(\{X \in F\})$ au lieu de $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega |\, X(\omega) \in F\})$ (X étant une variable aléatoire et $F \subset \mathbb{R}$).

Dans toute la suite du problème, on fixe une fonction continue h sur $[0,1]$ et $\varepsilon > 0$.

I] **1)** Soit Z une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$, admettant une variance $var(Z)$. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, on a:

$$\mathbb{P}(\{|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq \alpha\}) \leq \frac{var(Z)}{\alpha^2} \cdot$$

2) Soient $Z_1, \ldots, Z_n$ des variables aléatoires (deux à deux) indépendantes. Montrer que

$$var\Big(\sum_{i=1}^{n} Z_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} var(Z_i).$$

II] On fixe $p \in [0,1]$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires (mutuellement) indépendantes, chacune à valeurs dans $\{0,1\}$, de même loi: pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbb{P}_{X_i}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{X_i = 1\}) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_{X_i}(\{0\}) = \mathbb{P}(\{X_i = 0\}) = 1 - p$$

On considère $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et on pose $Y_n = \dfrac{S_n}{n} \cdot$

1) S_n suit une loi usuelle: laquelle?

2) a) Quelle est la loi de Y_n ?

b) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et en déduire $\mathbb{E}(Y_n)$.

[1]Ainsi on ne souciera pas de la tribu, qui sera tout simplement l'ensemble de toutes les parties de Ω, comme d'habitude.

c) Calculer $var(X_n)$ et en déduire $var(Y_n)$.

3) a) Quelles sont les valeurs prises par $h(Y_n)$?

b) Dans le cas où h est injective, quelle est la loi de $h(Y_n)$? Traiter ensuite le cas de h quelconque.

4) Donner une expression de $\mathbb{E}(h(Y_n))$.

III] 1) Justifier qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0,1]$:

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |h(x) - h(y)| \leq \varepsilon.$$

Dans la suite de cette partie, on note $I = \{\omega \in \Omega | \, |Y_n(\omega) - p| < \delta\}$ et $\mathbb{1}_I$ la fonction indicatrice de I.

2)a) Montrer $\mathbb{E}\Big(|h(Y_n) - h(p)|.\mathbb{1}_I\Big) \leq \varepsilon$.

b) En déduire qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\mathbb{E}|h(Y_n) - h(p)| \leq M.\mathbb{P}(\Omega \setminus I) + \varepsilon$.

c) En déduire $\left|\mathbb{E}\Big(h(Y_n) - h(p)\Big)\right| \leq \dfrac{M}{n\delta^2} + \varepsilon$.

IV] 1) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a pour tout $p \in [0,1]$:

$$\left| h(p) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h\left(\frac{k}{n}\right) p^k (1-p)^{n-k} \right| \leq 2\varepsilon.$$

2) Conclure dans le cas où le segment est $[0,1]$.

3) Conclure dans le cas d'un segment quelconque.