CONCOURS 2000 POUR LE RECRUTEMENT D'ELEVES NON FONCTIONNAIRES DE L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE - OPTION MATHEMATIQUES.

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée 4 heures

Ce sujet comporte cinq pages. Si le candidat détecte ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre. Dans tout le problème, sauf indication contraire, E désigne un espace de Banach réel (i.e. un espace vectoriel réel normé complet) de dimension infinie. On notera E' l'ensemble des formes linéaires continues sur E muni de la norme

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\varphi(x)|.$$

On **admettra** que E' muni de la norme ci-dessus est un espace de Banach de dimension infinie.

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite (infinie) de vecteurs non nuls de E. On note F le sous espace de E engendré par les combinaisons linéaires finies des x_n et $\overline{F}$ son adhérence dans E .

On dira que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est **basique** si pour tout vecteur $x \in \bar{F}$, il existe une suite **unique** $(a_n)_{n\geq 1}$ de réels telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge dans E et soit de somme x.

On dira que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ vérifie la condition (*) si

$$\exists K > 0, \forall p, q \in \mathbf{N}, 1 \leq p \leq q, \forall (a_k)_{k=1}^{q} \in \mathbf{R}^q, || \sum_{k=1}^{p} a_k x_k|| \leq K|| \sum_{k=1}^{q} a_k x_k||.$$

Partie I

On se propose de montrer ici que E contient une suite infinie de vecteurs non nuls vérifiant (*).

Soient $x_1, ..., x_n$ n vecteurs de E vérifiant

$$\exists C > 0, \forall p, q \in N, 1 \leq p \leq q \leq n, \forall (a_k)_{k=1}^{q} \in R^q, ||\sum_{k=1}^{p} a_k x_k|| \leq C||\sum_{k=1}^{q} a_k x_k||.$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé. On notera E_n le sous espace de E engendré par $x_1, ..., x_n$, S_n la sphère unité de E_n, et $\delta = \dfrac{\epsilon}{(1+\epsilon)}$.

1) Montrer qu'il existe $z_1, ..., z_M$ appartenant à S_n tels que

$$\forall z \in S_n, \exists j \in \{1, ..., M\}, ||z - z_j|| \leq \delta.$$

On **admettra** que

$$\forall k \in \{1, ..., M\}, \exists\ \varphi_k \in E', ||\varphi_k|| = 1, \varphi_k(z_k) = 1.$$

2) Montrer qu'il existe $x_{n+1} \in E$, $||x_{n+1}|| = 1$, tel que $x_{n+1} \in \bigcap_{k \in \{1,...,M\}} Ker\varphi_k$.

Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1} \in R$ tels que

$$||\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k|| = 1.$$

3-a) Montrer , en choisissant $j_0 \in \{1, ..., M\}$ et en estimant $\varphi_{j_0}(z_{j_0} + \alpha_{n+1} x_{n+1})$, que

$$||\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k|| \geq \frac{1}{1+\epsilon}.$$

3-b) Montrer que

$$\forall p, q \in N, 1 \leq p \leq q \leq n+1, \forall (a_k)_{k=1}^{n+1} \in R^{n+1}, ||\sum_{k=1}^{p} a_k x_k|| \leq C(1+\epsilon)||\sum_{k=1}^{q} a_k x_k||.$$

4) Montrer, en choisissant $\epsilon = \epsilon(n)$ convenablement et en raisonnant par récurrence, qu'il existe une suite infinie de vecteurs non nuls de E vérifiant (*).

Partie II

Question préliminaire: Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach, $E' \subset E_1$ un sous-espace vectoriel dense dans E_1 et $T : E' \to E_2$ une application linéaire continue. Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire continue $\tilde{T} : E_1 \to E_2$ prolongeant T (i.e. telle que pour tout $x \in E', T(x) = \tilde{T}(x)$).

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs non nuls de E vérifiant (*) (avec une constante K). On note

$$H = \{x \in E; \exists (a_n)_{n\geq 1}, a_n \in \mathbf{R}, x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\}$$

et on munit H de la norme induite par E.

1) Montrer que pour tout $x \in H$, la suite (a_n) intervenant dans sa définition de x comme élément de H est unique.

2) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit $P_n : H \to E$ par $P_n(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $||P_n|| \leq K$ et que $(P_n)_{n\geq 1}$ est une famille de projecteurs linéaires dont on précisera l'image.

Dans toute la suite de cette partie F et G désignent respectivement le sous-espace vectoriel et le sous-espace vectoriel fermé de E engendrés par la suite (x_n).

3) En remarquant que $F \subset H \subset G$ et en utilisant la question préliminaire, montrer que P_n se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continu $\tilde{P_n}$ de G dans l'image de P_n . Montrer que

$$\forall\ x \in G, \tilde{P_n}(x) \to x \text{ quand } n \to \infty.$$

4) Montrer que pour tout $x \in G$,

$$x = \tilde{P_1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{P_{n+1}}(x) - \tilde{P_n}(x)).$$

En déduire que $G = H$ et conclure.

Partie III

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel normé. Deux joueurs, Pierre et Paul jouent au jeu suivant: Pierre choisit un ouvert U_1 non vide de E, puis Paul choisit un ouvert non vide V_1 inclus dans U_1, puis Pierre choisit un ouvert non vide U_2 inclus dans V_1 et ainsi de suite. A la fin de la partie, les deux joueurs ont ainsi défini deux suites décroissantes d'ouverts non vides (U_n) et (V_n) telles que

$$\forall\ n \geq 1,\ U_n \supseteq V_n \supseteq U_{n+1}.$$

1-a) Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} U_n = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} V_n$.

Notons U cet ensemble. Pierre a gagné la partie si U est vide et Paul si U n'est pas vide. On dit que l'un des joueurs a une stratégie gagnante s'il a une méthode lui permettant de gagner quelle que soit la façon de jouer de son adversaire. Ainsi, il est impossible que les deux joueurs aient chacun une stratégie gagnante. Par contre, il n'est pas certain à priori que l'un des deux joueurs en ait une.

1-b) On suppose que l'espace E soit une réunion dénombrable de fermés F_n d'intérieur vide. Montrer que Pierre a une stratégie gagnante. Indication: Pierre commence à jouer $U_1 = E$ et à chaque choix V_n de Paul, Pierre répond $V_n \setminus F_n$.

1-c) Montrer que si E est complet, alors Paul a une stratégie gagnante. Indication: On rappelle le résultat suivant: Si (F_n) est une suite décroissante de fermés de E dont le diamètre trend vers 0, alors l'intersection des F_n est non vide.

1-d) En déduire qu'un espace de Banach ne peut pas être égal à une réunion de fermés d'intérieur vide.

Dans toute la suite de cette partie, E et F désignent deux espaces de Banach, $T : E \to F$ une application linéaire continue et bijective, $B(x, r)$ la boule de F de centre $x \in F$ et de rayon r et pour une partie C de F, $\overline{C}$ désigne son adhérence dans F.

2-a) On pose $X_n = n\overline{T(B(0,1))} = \{y \in F; \exists\ x \in \overline{T(B(0,1))}, y = nx\}$. Montrer que $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = F$.

2-b) En déduire qu'il existe $c > 0$ et $y_0 \in F$ tels que $B(y_0, 4c) \subset \overline{T(B(0,1))}$.

2-c) Montrer que $\overline{T(B(0,1))} \supset B(0, 2c)$.

2-d) Soit $y \in F$ vérifiant $\|y\| < c$. Construire par récurrence une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ vérifiant:

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \text{ et } \|y - T(z_1 + \ldots + z_n)\| < \frac{c}{2^n}.$$

2-e) Montrer que la suite (x_n) définie par $x_n = z_1 + \ldots + z_n$ converge dans E vers $x = T^{-1}(y)$ et que $\|x\| < 1$;

2-f) Montrer que T^{-1} est continu.

Partie IV

Dans cette partie, E est un espace de Banach de dimension infinie et $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite basique d'éléments de E. On note A l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ de réels telles que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge dans E . On munit l'espace vectoriel A de la norme:

$$||(a_n)||_A = \sup_{N\geq 1} ||\sum_{n=1}^{N} a_n x_n||$$

1) Montrer que A muni de la norme $||.||_A$ est un espace de Banach.

On note G le sous espace vectoriel fermé de E engendré par les vecteurs $(x_n)_{n\geq 1}$

On définit l'application linéaire $\Phi : A \to G$ par

$$\Phi((a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

2-a) Montrer que Φ est continue et bijective.

2-b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ vérifie la condition (*).

Partie V

Dans cette partie, on considère un espace de Banach E de dimension infinie et une suite basique (x_n) d'éléments de E de norme 1. La suite (x_n) vérifie donc la condition (*) avec une contante K. On note G le sous espace fermé de E engendré par les vecteurs x_n. On considère enfin une suite (y_n) d'éléments de E telle que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \frac{1}{2K}.$$

1-a) Montrer que pour tous $1 \leq p \leq q \in \mathbf{N}$, $\max\limits_{p \leq k \leq q} |a_k| \leq 2K \|\sum\limits_{k=p}^{q} a_k x_k\|$.

1-b) Montrer que pour toute suite réelle (a_k), la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ converge dans E si et seulement si la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k$ converge dans E.

1-c) Montrer qu'il existe une consrtante $C > 0$ telle que :

$$\forall p, q \in \mathbf{N}, 1 \leq p \leq q, \forall (a_k)_{k=1}^{q} \in \mathbf{R^q}, || \sum_{k=1}^{p} a_k x_k || \leq C || \sum_{k=1}^{q} a_k x_k ||.$$

On note Y le sous espace vectoriel fermé de E engendré par les vecteurs y_n.

1-d) Montrer que l'opérateur: $T : G \to Y$ défini par $T(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k y_k$ est un isomophisme linéaire continu ainsi que son inverse.

On suppose maintenent que $G = E$ et on note id l'application identité de E. Pour tout $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x_k \in E$, on pose $T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k y_k$ et $u(x) = x - T(x)$.

2-a) Montrer que $\|u\| < 1$.

2-b) Montrer que pour tout $x \in E$, la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u^k(x)$ converge dans E et que sa somme $S(x)$ définit un opérateur linéaire continu S tel que $S \circ T = T \circ S = id$.

2-c) Déterminer l'espace vectoriel fermé engendré par les vecteurs y_n.