CONCOURS 2001 POUR LE RECRUTEMENT D'ELEVES NON FONCTIONNAIRES DE L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE - OPTION MATHEMATIQUES.

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée 4 heures

Ce sujet comporte cinq pages. Si le candidat détecte ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème, le corps des scalaires est $\mathbb{R}$. Si X et Y sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace des applications linéaires de X dans Y et on note $|||f|||$ la norme opérateur (norme triple) usuelle de toute application continue $f \in \mathcal{L}(X,Y)$. On notera toujours I l'application identité, quel que soit l'espace sous-jacent, $\mathrm{Tr}(u)$ la trace d'un endomorphisme u sur un espace vectoriel de dimension finie et $\det(u)$ son déterminant. Le déterminant d'une matrice carrée A sera noté $\det(A)$. Enfin, $A^{\perp}$ désignera l'orthogonal (au sens du produit scalaire sous-jacent) d'un sous-espace A.

Soit E un espace vectoriel normé, on dit qu'une série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est inconditionnellement convergente dans E si pour tout choix de signes $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n x_n$ est convergente dans E.

Partie I.

1) Démontrer qu'une série de réels $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est inconditionnellement convergente si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ est convergente.

2) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, à quelle condition sur $\|x_n\|$, une série $\sum x_n$ de E est inconditionnellement convergente ? (on démontrera le résultat annoncé).

On note c_0 l'espace des suites réelles convergentes vers 0, que l'on munit de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k|$, avec $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On rappelle que c'est un espace de Banach.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $x^{(n)} \in c_0$ par $x_k^{(n)} = \dfrac{1}{n+1}$ si $k = n$ et 0 sinon. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{(n)}$ est inconditionnellement convergente dans c_0.

4) Conclure.

Partie II : lemme de Lewis.

Dans cette partie, $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension n, où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On définit ℓ_2^n comme l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. La norme est donc $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^{1/2}$. On note β_0 la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit

$$K = \{u \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E) |\ \ |||u||| = 1\}.$$

On fixe une base β de E. Pour $u \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, on définit $\Phi(u) = |\det(A)|$ où A est la matrice représentative de u dans les bases β_0 et β.

1) Montrer qu'il existe $u_0 \in K$ tel que $\sup_{u\in K} \Phi(u) = \Phi(u_0)$.

2) Montrer que u_0 est inversible.

3) On fixe $v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$|\det(I + \varepsilon u_0^{-1} \circ v)| \leq (1 + \varepsilon |||v|||)^n.$$

4) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que pour tout réel t, on a

$$\det(I + tf) = 1 + t\mathrm{Tr}(f) + o(t).$$

5) En déduire que u_0 vérifie : pour tout $v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, on a $\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \leq n|||v|||$.
Que vaut $\sup\{ \mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) |\ v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$ avec $|||v||| \leq 1\}$?

Partie III : lemme de Dvoretzky-Rogers.

On reprend les notations de la partie II.

1) Soit $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Soit F un sous-espace de ℓ_2^n de dimension i. On note $P \in \mathcal{L}(\ell_2^n)$ la projection orthogonale sur $F^\perp$.

1-a) Montrer que $\dfrac{n-i}{n} \leq |||u_0 \circ P|||$.

1-b) En déduire qu'il existe $y \in F^\perp$ tel que $\|u_0(y)\| \geq \dfrac{n-i}{n}$ et $\|y\|_2 = 1$.

2) Construire une base orthonormale $(y_1, \ldots, y_n)$ de ℓ_2^n telle que $\|u_0(y_j)\| \geq \dfrac{n-j+1}{n}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

3) Soit $m = [\frac{n}{2}] + 1$ où $[\frac{n}{2}]$ désigne la partie entière de $\dfrac{n}{2}$. On définit les vecteurs de E : $v_i = \|u_0(y_i)\|^{-1}.u_0(y_i)$ pour $1 \leq i \leq m$.

Montrer que pour tous $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$,

$$\Big\|\sum_{i=1}^m a_i v_i\Big\| \leq 2\Big(\sum_{i=1}^m a_i^2\Big)^{1/2}.$$

Partie IV : théorème de Dvoretzky-Rogers.

Dans cette partie, $(X, \|.\|)$ désigne un espace de Banach de dimension infinie.
On fixe une suite de réels positifs $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2$ converge. On pose $c = 2\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2\Big)^{1/2}$.

1) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ avec $n_0 = 0$ vérifiant $\sum\limits_{n \geq n_k} c_n^2 \leq c^2 4^{-k}$ pour tout entier k.

2) Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de X de norme 1 telle que pour tout entier k et pour tous réels $a_{n_k+1},\dots,a_{n_{k+1}}\in\mathbb{R}$,

$$\Big\|\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i v_i\Big\| \le 2\Big(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i^2\Big)^{1/2}.$$

3) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de X telle que $\|x_n\| = c_n$ et telle que la série $\sum x_n$ soit inconditionnellement convergente dans X.

4) En déduire que dans un espace de Banach de dimension infinie, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs telle $\sum x_n$ est inconditionnellement convergente dans X et la série $\sum \|x_n\|$ diverge.

Partie V : "unicité" dans le lemme de Lewis.

On reprend les notations de la partie II. On rappelle que $\ell_2^n = \mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique. u_0 est l'application construite dans la partie II.

1) Montrer que pour tout automorphisme orthogonal w de $\mathbb{R}^n$, $u_0\circ w$ a les mêmes propriétés que u_0 : on rappelle que u_0 est inversible, $|||u_0||| = 1$ et pour tout $v\in\mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, on a $\mathrm{Tr}(u_0^{-1}\circ v)\le n|||v|||$.

2) Soit $f\in GL(\mathbb{R}^n)$ (on rappelle qu'il s'agit de l'ensemble des endomorphismes inversibles de $\mathbb{R}^n$).

2-a) Montrer qu'il existe un endomorphisme s de $\mathbb{R}^n$, symétrique défini positif tel que $f^*\circ f = s\circ s$.

2-b) Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal u de $\mathbb{R}^n$ et un endomorphisme s symétrique défini positif tel que $f = u\circ s$.

On suppose qu'il existe $u_1\in\mathcal{L}(\ell_2^n, E)$ ayant les mêmes propriétés que u_0 : u_1 est inversible, $|||u_1||| = 1$ et pour tout $v\in\mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, on a $\mathrm{Tr}(u_1^{-1}\circ v)\le n|||v|||$.

3) Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal u de $\mathbb{R}^n$ et un endomorphisme s symétrique défini positif tel que $u_1 = u_0\circ u\circ s$.

4) Montrer que $\det(s)\le 1$ et que $\mathrm{Tr}(s^{-1})\le n$.

5) Montrer que si $t_1,\dots,t_n>0$, alors $\Big(\prod_{k=1}^n t_k\Big)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n t_k$. Etudier le cas d'égalité.

6) Conclure.

Partie VI : Opérateurs absolument sommants.

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés dont on note respectivement les normes $\|.\|$ et$\|.\|'$. Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, on note $\Lambda(T)$ l'ensemble des constantes $C \geq 0$ telles que pour tout choix d'un nombre fini de vecteurs $x_1, \ldots, x_p \in X$, on a

$$\sum_{j=1}^{p} \|T(x_j)\|' \leq C \sup\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j\Big\|;\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p \in \{-1,1\}\Big\}.$$

On dit que $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est absolument sommante si $\Lambda(T)$ est non vide.

1) Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ absolument sommante. Montrer que $\Lambda(T)$ admet un plus petit élément que l'on notera $\pi(T)$.

2) Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ absolument sommante. Montrer que T est continue et comparer $|||T|||$ et $\pi(T)$.

3) Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. Montrer que l'ensemble des applications absolument sommantes de X dans Y est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X,Y)$ et que $T \mapsto \pi(T)$ est une norme sur cet espace.

4) Soit X l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme sup usuelle : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On désigne par Y l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$. Soit J l'application de X dans Y qui à toute fonction continue sur $[0,1]$ associe elle-même.

Montrer que J est absolument sommante et calculer $\pi(J)$.

5) Montrer (de façon élémentaire) que l'identité de c_0 n'est pas absolument sommante.

6) Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E.

6-a) Montrer que $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante, où $M_p = \sup\Big\{\Big\|\sum\limits_{j=0}^{p} \varepsilon_j x_j\Big\|;\ \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_p \in \{-1,1\}\Big\}$.

6-b) En déduire que si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est inconditionnellement convergente dans E alors la suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.

6-c) Soient $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, absolument sommante et une série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ inconditionnellement convergente dans X. Que peut-on dire de $(\|T(x_j)\|')_{j\in\mathbb{N}}$?

7) A quelle condition nécessaire et suffisante l'identité d'un espace de Banach est absolument sommante ?