ENSAE 2003: Epreuve spécifique.

Pascal Lefèvre*

Partie I.

1) Inégalité de Young. Si x ou y est nul alors le résultat est trivial. Pour x et y strictement positifs, on peut utiliser la concavité du logarithme (pour $t > 0$, $\ln''(t) = (-1)/t^2 < 0$) :

$$\ln\Big(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\Big) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) = \ln(xy).$$

La croissance stricte du logarithme donne le résultat.

Remarque : on peut bien sûr aussi étudier sur $\mathbb{R}^+$ la fonction $\delta(x) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q - xy$ (à y positif fixé) dont le minimum est atteint en $y^{\frac{1}{p-1}}$. Comme $\delta(y^{\frac{1}{p-1}}) = 0$, on en déduit l'inégalité.

2) Inégalité de Hölder. Premier cas : supposons d'abord que les coefficients vérifient $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n|^p = \sum\limits_{n=1}^{N} |b_n|^q = 1$. D'après le 1), on a

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} a_n.b_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n|.|b_n| \leq \sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{p}|a_n|^p + \frac{1}{q}|b_n|^q\Big) = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{N}|a_n|^p + \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{N}|b_n|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Second cas : supposons que $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n|^p$ ou $\sum\limits_{n=1}^{N} |b_n|^q$ soit nul. Disons que $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n|^p = 0$ pour fixer les idées; alors par positivité des coefficients, pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on a $a_n = 0$ donc l'inégalité à prouver se réduit à $0 \leq 0$.

Dernier cas : $A = \sum\limits_{n=1}^{N} |a_n|^p$ et $B = \sum\limits_{n=1}^{N} |b_n|^q$ sont strictement positifs. On peut appliquer le premier cas aux scalaires $a'_n = A^{-1/p}a_n$ et $b'_n = B^{-1/q}b_n$, puisque clairement on a

*Auteur du sujet

$\sum\limits_{n=1}^{N} |a'_n|^p = \sum\limits_{n=1}^{N} |b'_n|^q = 1$. On en déduit que

$$A^{-1/p}B^{-1/q}\Big|\sum_{n=1}^{N} a_n.b_n\Big| = \Big|\sum_{n=1}^{N} a'_n.b'_n\Big| \leq 1$$

d'où le résultat.

3) Pour tous $b_1, \dots, b_N$ tels que $\sum\limits_{n=1}^{N} |b_n|^q = 1$, on a d'après la question précédente : $\Big|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n.b_n\Big| \leq \Big(\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n|^p\Big)^{1/p}$ donc $\sup\{|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n.b_n|;\ \sum\limits_{n=1}^{N} |b_n|^q = 1\} \leq \Big(\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n|^p\Big)^{1/p}$.

Réciproquement, si tous les scalaires a_n sont nuls, la relation est triviale. Sinon, $\alpha = \Big(\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n|^p\Big)^{1/p} > 0$ et on définit pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$: $b_n = \alpha^{-p/q}\varepsilon_n |a_n|^{p-1}$, où ε_n désigne le signe de a_n (dison que par convention le signe de 0 est $+1$). Via $1/p + 1/q = 1$, on a d'une part

$$\sum_{n=1}^{N} a_n.b_n = \sum_{n=1}^{N} \alpha^{-p/q}|a_n|^p = \alpha^{p(1-1/q)} = \alpha.$$

D'autre part, comme $(p-1)q = p$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} |b_n|^q = \sum_{n=1}^{N} \alpha^{-p}|a_n|^{(p-1)q} = 1.$$

On en déduit que $\sup\{|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n.b_n|;\ \sum\limits_{n=1}^{N} |b_n|^q = 1\} = \Big(\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n|^p\Big)^{1/p}$.

4) Inégalité de Minkowski. Tout d'abord le cas $p = 1$ résulte évidemment de l'inégalité triangulaire usuelle. Il s'agit donc de traiter le cas $p > 1$.

Solution 1 : on suit l'indication de l'énoncé. Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on a $|a_n + b_n|^p = |a_n + b_n|.|a_n + b_n|^{p-1} \leq |a_n|.|a_n + b_n|^{p-1} + |b_n|.|a_n + b_n|^{p-1}$. On somme sur n puis on utilise alors l'inégalité de Hölder (question 2) pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^p \leq \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\Big)^{1/p}.\Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} + \Big(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^p\Big)^{1/p}.\Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^{(p-1)q}\Big)^{1/q}.$$

Comme $(p-1)q = p$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^p \leq \Big[\Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^p\Big)^{1/p}\Big]\Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^p\Big)^{1/q}.$$

On conclut classiquement : si $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^p$ est nul, alors l'inégalité à prouver est triviale, sinon on simplifie par $\Big(\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^p\Big)^{1/q}$ et on obtient le résultat.

Solution 2 : on linéarise (raisonnement par dualité). Pour tous réels $c_1, \dots, c_N$ tels que $\sum\limits_{n=1}^{N} |c_n|^q = 1$, on a par l'inégalité triangulaire usuelle puis l'inégalité de Hölder (question 2)

$$\Big|\sum_{n=1}^{N}(a_n+b_n)c_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{N}|a_n|.|c_n| + \sum_{n=1}^{N}|b_n|.|c_n| \leq \Big(\sum_{n=1}^{N}|a_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=1}^{N}|b_n|^p\Big)^{1/p}.$$

On passe alors au sup. sur les c_n et on obtient le résultat d'après la question 3.

5)a) Il s'agit seulement de justifier que $\|.\|_p$ est une norme car la strucure d'espace vectoriel de ℓ_N^p est héritée de celle de $\mathbb{R}^n$. La positivité est triviale et le fait que $\|x\|_p$ implique la nullité de x a déjà été signalé au 2. L'inégalité triangulaire a fait l'objet de la question 4. Reste l'homogénéité, qui est évidente.

L'application θ introduite dans l'énoncé est d'abord bien définie car, à $b \in \ell_N^q$ fixé, $a \mapsto \sum\limits_{n=1}^{N} a_n.b_n$ est linéaire. L'application θ est elle-même clairement linéaire. Enfin, c'est une isométrie car, pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, on a d'après la question 3 (appliqué au couple (q,p) au lieu de (p,q))

$$|||\theta(b)||| = \sup_{\|a\|_p=1} |\theta(b)(a)| = \sup_{\|a\|_p=1} |\sum_{n=1}^{N} a_n.b_n| = \|b\|_q.$$

Comme les dimensions de $(\ell_N^p)^*$ et ℓ_N^q sont les mêmes (à savoir n), cette isométrie est bijective.

5)b) Le fait que $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ soient des normes est évident (et est traité en cours). Il s'agit d'extrapoler au cas p infini le résultat du a.

On reprend la même application formelle :

$$\begin{array}{rcl}\theta : \ell_N^\infty & \longrightarrow & (\ell_N^1)^* \\ b & \longmapsto & |a \in \ell_N^1 \mapsto \sum\limits_{n=1}^{N} a_n.b_n.\end{array}$$

Elle est toujours linéaire et c'est une isométrie car $|||\theta(b)||| = \sup\limits_{\|a\|_1=1} |\sum\limits_{n=1}^{N} a_n.b_n| = \|b\|_\infty$. En effet, l'inégalité $\sup\limits_{\|a\|_1=1} |\sum\limits_{n=1}^{N} a_n.b_n| \leq \|b\|_\infty$ est évidente. Pour la réciproque, il suffit de remarquer que la borne supérieure est atteinte pour $a_n = \delta_{n,n_0}$ (symbole de Kronecker), où $n_0 \in \{1, \dots, N\}$ vérifie $\|b\|_\infty = |b_{n_0}|$.

Encore une fois, on reprend

$$\begin{array}{rcl}\theta : \ell_N^1 & \longrightarrow & (\ell_N^\infty)^* \\ b & \longmapsto & |a \in \ell_N^\infty \mapsto \sum\limits_{n=1}^{N} a_n.b_n.\end{array}$$

On a $|||\theta(b)||| = \sup_{\|a\|_\infty=1} |\sum_{n=1}^{N} a_n.b_n| = \|b\|_1$. En effet, outre l'inégalité évidente, il s'agit de remarquer que cette fois la borne supérieure est atteinte pour $a_n =$signe(b_n).

Pour $p \in]1, \infty[$, resp. $p = 1$, resp. $p = \infty$, le dual (topologique) de ℓ_N^p est donc isométrique à ℓ_N^q, où $q = \frac{p}{p-1}$, resp. $q = \infty$, resp. $q = 1$.

Partie II.

1)a) Pour tous $v, w \in F$, on a $v + w \in F$ donc

$$f(v) + f(w) = f(v + w) \leq |||f|||.\|v + w\| \leq |||f|||.(\|v - x_0\| + \|w + x_0\|).$$

En réarrangeant, on obtient $f(v) - |||f|||.\|v - x_0\| \leq |||f|||.\|w + x_0\| + f(w)$. En prenant la borne supérieure sur $v \in F$, puis la borne inférieure sur $w \in F$, on a l'inégalité demandée.

1)b) D'après la question précédente, il suffit tout simplement de choisir α dans l'intervalle $\left[\sup_{v\in F}\{f(v) - |||f|||.\|v - x_0\|\}, \inf_{v\in F}\{|||f|||.\|v + x_0\| + f(v)\}\right]$ et les inégalités en découlent immédiatement.

1)c) D'abord $\tilde{f}$ est bien définie car F et $\mathbb{R}x_0$ sont en somme directe et la linéarité est alors évidente. De même, il est clair que $\tilde{f}_{|F} = f$. La continuité de $\tilde{f}$ est une trivialité en soi puisqu'il s'agit d'une application linéaire en dimension finie. Le point clé est bien sûr la norme. Puisque $\tilde{f}_{|F} = f$, on $|||f||| \leq |||\tilde{f}|||$. Soit $x = v + tx_0 \in \tilde{F} \setminus F$, avec $v \in F$ et t réel non nul.

Si $t > 0$, comme $t^{-1}v \in F$, on a $\tilde{f}(x) = t(f(t^{-1}v) + \alpha) \leq t|||f|||.\|t^{-1}v + x_0\|$, d'après 1.b. On en déduit $\tilde{f}(x) \leq |||f|||.\|x\|$.

Si $t < 0$, comme $-\frac{1}{t}v \in F$, on a $\tilde{f}(x) = (-t)(f(-\frac{1}{t}v) - \alpha) \leq (-t)|||f|||.\| - \frac{1}{t}v - x_0\|$, d'après 1.b. Donc on a aussi $\tilde{f}(x) \leq |||f|||.\|x\|$.

On en déduit que pour tout $x \in \tilde{F}$, on a $\tilde{f}(x) \leq |||f|||.\|x\|$ d'où $|||\tilde{f}||| \leq |||f|||$.

2) On procède par récurrence sur la dimension, par exemple celle d'un supplémentaire. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété :"pour tout espace vectoriel normé de dimension finie E et tout sous-espace F dont la codimension est n, pour toute forme linéaire f sur F, il existe $g \in E^*$ telle que $g_{|F} = f$ et $|||g||| = |||f|||$."

Le fait que $\mathcal{P}_1$ soit vraie provient de la question 1. Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Soient donc E un espace vectoriel normé de dimension finie, un sous-espace F dont la codimension est $n + 1$ et $f \in F^*$. Il existe $x_0 \in E \setminus F$, ainsi l'espace $\tilde{F} = F \oplus \mathbb{R}x_0$ est un sous-espace de E dont la codimension est n. D'après la question précédente (ou le cas $n = 1$), il existe $\tilde{f} \in \tilde{F}^*$ telle que $\tilde{f}_{|F} = f$ et $|||\tilde{f}||| = |||f|||$. Enfin, en appliquant l'hypothèse de récurrence, il existe $g \in E^*$ telle que $g_{|\tilde{F}} = \tilde{f}$ et $|||g||| = |||\tilde{f}|||$. On a en particulier, $g_{|F} = \tilde{f}_{|F} = f$ et $|||g||| = |||f|||$. La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

3) Si $x = 0$, alors le résultat est trivial.

Sinon, considérons F, la droite vectorielle engendrée par x et la forme linéaire f définie sur F par $f(tx) = t\|x\|$, pour tout réel t. Clairement, $|||f||| = 1$. En appliquant la question 2, on obtient $g \in E^*$ telle que $g_{|F} = f$ et $|||g||| = |||f||| = 1$. En particulier $g(x) = f(x) = \|x\|$. On a donc $\|x\| \leq \sup\{|f(x)|;\ f \in E^*,\ |||f||| = 1\}$.

L'inégalité inverse est évidente par définition de la norme opérateur.

Partie III.

1)a) Pour tout $u \in GL(E,F)$, on a $Id_E = u^{-1} \circ u$ donc $1 = |||Id_E||| \leq |||u^{-1}|||.|||u|||$. Ainsi $\ln(|||u^{-1}|||.|||u|||) \geq 0$. D'où le résultat.

1)b) L'application de $GL(E,F)$ dans $GL(F,E)$ qui à u associe u^{-1} est une bijection donc

$$\{\ln(|||u|||.|||u^{-1}|||);\ u \in GL(E,F)\} = \{\ln(|||v|||.|||v^{-1}|||);\ v \in GL(F,E)\}.$$

On en déduit l'égalité des bornes inférieures.

2)a) Posons $\delta = \exp d(E,F)$. Par définition de $d(E,F)$ et comme l'exponentielle est continue, il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de $GL(E,F)$ telle que $\delta = \lim |||u_n|||.|||u_n^{-1}|||$. Considérons la suite $v_n = |||u_n|||^{-1}u_n$ (u_n est bien sûr non nulle puisque bijective). C'est une suite de la sphère unité de $\mathcal{L}(E,F)$, qui est compacte (fermé borné en dimension finie). On en extrait une sous-suite convergente $(v_{n_j})_j$ vers v, aussi élément de la sphère unité de $\mathcal{L}(E,F)$. Comme $|||v_{n_j}^{-1}||| = |||u_{n_j}|||.|||u_{n_j}^{-1}|||$ converge vers δ, la suite $(v_{n_j}^{-1})_j$ est bornée dans $\mathcal{L}(E,F)$ et admet donc une sous-suite $(v_{m_i}^{-1})_i$ convergente vers w, à nouveau par compacité.

On remarque que pour tout i, on a $v_{m_i}^{-1} \circ v_{m_i} = Id_E$ donc par continuité du produit (i.e. de la composition), on obtient $w \circ v = Id_E$. Soit en prouvant de même $v \circ w = Id_F$ soit en invoquant l'égalité des dimensions de E et F, on en déduit que $v \in GL(E,F)$ avec $w = v^{-1}$.

Enfin, $|||v|||.|||v^{-1}||| = |||w||| = \lim |||v_{m_i}^{-1}||| = \delta$ donc $d(E,F) = \ln(|||v|||.|||v^{-1}|||)$.

Remarque : l'argument via la seconde extraction (sur la suite des inverses) évite d'invoquer (et donc de rejustifier) la continuité de l'application $u \in GL(E,F) \mapsto u^{-1}$.

2)b) Si E et F sont isométriques, il existe f une isométrie de E sur F et f^{-1} est clairement une isométrie de F sur E. Ainsi, $|||f||| = |||f^{-1}||| = 1$ donc $d(E,F) = 0$.

Réciproquement, d'après la question précédente, il existe $u \in GL(E,F)$ tel que $|||u|||.|||u^{-1}||| = 1$. Montrons que $f = |||u|||^{-1}u$ est une isométrie de E sur F. En effet, $|||f||| = 1$ et $f^{-1} = |||u|||u^{-1}$ donc $|||f^{-1}||| = 1$. Dès lors pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\| \leq |||f^{-1}|||.\|f(x)\| = \|f(x)\| \leq |||f|||.\|x\| = \|x\|.$$

Les inégalités sont donc des égalités et $\|f(x)\| = \|x\|$.

3) Soient $v \in GL(E,F)$ et $w \in GL(F,G)$ alors $w \circ v \in GL(E,G)$. Par définition, $d(E,G) \leq \ln(|||w \circ v|||.|||(w \circ v)^{-1}|||)$ donc

$$d(E,G) \leq \ln(|||w|||.|||v|||.|||w^{-1}|||.|||v^{-1}|||) \leq \ln(|||v|||.|||v^{-1}|||) + \ln(|||w|||.|||w^{-1}|||).$$

En passant à la borne inférieure sur v puis w, on obtient $d(E,G) \leq d(E,F) + d(F,G)$ (on aurait aussi pu prendre directement v et w correspondant aux minima, grâce à la question 2.a).

4)a) Evidemment u^* est une application de F^* dans E^*, dont la linéarité est triviale à vérifier. D'autre part,

$$|||u^*||| = \sup_{\substack{f \in F^* \\ |||f|||=1}} |||f \circ u||| = \sup_{\substack{f \in F^* \\ |||f|||=1}} \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} |f \circ u(x)| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \sup_{\substack{f \in F^* \\ |||f|||=1}} |f \circ u(x)|$$

or, d'après II.3., on a $\sup_{\substack{f \in F^* \\ |||f|||=1}} |f(u(x))| = \|u(x)\|$ donc

$$|||u^*||| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\| = |||u|||.$$

4)b) Soit $u \in GL(E,F)$, on vérifie que $u^* \in GL(F^*,E^*)$ avec $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$. En effet, on a pour tout $\zeta \in F^*$, $(u^{-1})^* \circ u^*(\zeta) = (\zeta \circ u) \circ u^{-1} = \zeta$. Donc $(u^{-1})^* \circ u^* = Id_{F^*}$ et comme F^* et E^* sont de même dimension (ou en recommençant dans l'autre sens), on a le résultat annoncé.

On déduit que pour tout $u \in GL(E,F)$, on a

$$\ln(|||u|||.|||u^{-1}|||) = \ln(|||u^*|||.|||(u^*)^{-1}|||) \geq d(E^*,F^*).$$

Puis par passage à la borne inférieure, on a $d(E,F) \geq d(E^*,F^*)$.

Pour établir l'égalité, on a alors plusieurs arguments :

Argument 1 : l'application de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(F^*,E^*)$ qui à u associe son adjoint u^* est un isomorphisme car elle est linéaire injective (c'est une isométrie d'après 4.a) et les espaces sont de même dimension. Ainsi, pour tout $v \in GL(F^*,E^*)$, il existe $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $u^* = v$. De plus, on constate que $u \in GL(E,F)$ avec $(u^{-1})^* = v^{-1}$: en effet (par exemple), il existe $w \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $v^{-1} = w^*$ et on a $(w \circ u)^* = u^* \circ w^* = v \circ v^{-1} = Id$ donc $w \circ u = Id_E$; de même $w \circ u = Id_F$. D'où $\ln(|||v|||.|||v^{-1}|||) = \ln(|||u|||.|||u^{-1}|||) \geq d(E,F)$ donc $d(E^*,F^*) \geq d(E,F)$.

Argument 2 : via le bidual. L'injection canonique J de E dans son bidual $E^{**} = (E^*)^*$ est définie par $J(x)(f) = f(x)$, pour tous $x \in E$ et $f \in E^*$. D'une part, on a d'après ce qui précède $d(E,F) \geq d(E^*,F^*) \geq d(E^{**},F^{**})$. D'autre part, Ψ est une isométrie d'après II.3. car $|||\Psi(x)||| = \sup\limits_{\substack{f\in E^* \\ |||f|||=1}} |f(x)| = \|x\|$. Ainsi un espace vectoriel normé de dimension finie est isométrique à son bidual donc (cf. 2.b) $d(E,E^{**}) = d(F,F^{**}) = 0$. Comme (cf. 3) $d(E,F) \leq d(E,E^{**}) + d(E^{**},F^{**}) + d(F,F^{**})$, on en déduit $d(E,F) \leq d(E^{**},F^{**})$. D'où le résultat.

Partie IV.

1) Il s'agit de l'identité du parallélogramme généralisée dont nous présentons deux preuves :

Solution 1 : par récurrence sur m. Pour $m=1$, c'est trivial et pour $m=2$, c'est l'identité classique du parallélogramme (ℓ_n^2 est préhilbertien : c'est $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique !). Supposons le résultat vrai pour m (pour toute famille de m vecteurs), avec $m \geq 2$. On calcule

$$\frac{1}{2^{m+1}} \sum_{\varphi\in\omega_{m+1}} \Big\|\sum_{i=1}^{m+1} \varphi(i)x_i\Big\|_2^2 = \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{\psi\in\omega_m} \sum_{\varepsilon\in\{\pm1\}} \Big\|\sum_{i=1}^{m} \psi(i)x_i + \varepsilon x_{m+1}\Big\|_2^2$$

or $\sum\limits_{\varepsilon\in\{\pm1\}} \Big\|\sum_{i=1}^m \psi(i)x_i + \varepsilon x_{m+1}\Big\|_2^2 = 2\Big\|\sum_{i=1}^m \psi(i)x_i\Big\|_2^2 + 2\Big\|x_{m+1}\Big\|_2^2$ d'après le cas $m=2$, à ψ fixé. Comme le cardinal de ω_m est 2^m, on a $\dfrac{1}{2^m} \sum\limits_{\psi\in\omega_m} \|x_{m+1}\|_2^2 = \|x_{m+1}\|_2^2$. Enfin, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\frac{1}{2^{m+1}} \sum_{\varphi\in\omega_{m+1}} |\Big\|\sum_{i=1}^{m+1} \varphi(i)x_i\Big\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m+1} \|x_i\|_2^2.$$

Solution 2 : par Pythagore dans l'espace L^2 associé au groupe $\{\pm1\}^m$. On développe, d'abord dans l'espace euclidien ℓ_n^2 (dont le produit scalaire est noté $\langle .,. \rangle$)

$$\sum_{\varphi\in\omega_m} \Big\|\sum_{i=1}^{m} \varphi(i)x_i\Big\|_2^2 = \sum_{\varphi\in\omega_m} \sum_{1\leq i,j\leq m} \varphi(i)\varphi(j)\langle x_i,x_j\rangle = 2^m \sum_{1\leq i\leq m} \|x_i\|_2^2 + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq m \\ i\neq j}} \sum_{\varphi\in\omega_m} \varphi(i)\varphi(j)\langle x_i,x_j\rangle.$$

Fixons $i \neq j$ où $1 \leq i,j \leq m$. On a $\sum\limits_{\varphi\in\omega_m} \varphi(i)\varphi(j) = \sum\limits_{\substack{\psi\in\omega_m \\ \psi(i)=1}} \psi(j) - \sum\limits_{\substack{\psi\in\omega_m \\ \psi(i)=-1}} \psi(j) = 0$, car $\{\psi \in \omega_m |\, \psi(i)=1\}$ est en bijection avec l'ensemble des applications de $\{1,\ldots,m\} \setminus \{i\}$ dans $\{\pm1\}$, de même pour $\{\psi \in \omega_m |\, \psi(i)=-1\}$.

On en déduit que $\sum\limits_{\substack{1\leq i,j\leq m \\ i\neq j}} \sum\limits_{\varphi\in\omega_m} \varphi(i)\varphi(j)\langle x_i,x_j\rangle = 0$. D'où le résultat.

2)a) Il suffit d'utiliser la question précédente : $A(u) = 2^n \sum\limits_{i=1}^n \|u(e_i)\|_2^2 \leq 2^n \sum\limits_{i=1}^n |||u|||^2\|e_i\|_p^2$. Comme $\|e_i\|_p = 1$, on a l'inégalité.

2)b) Comme $e_i = u^{-1}(u(e_i))$, on a $|||u^{-1}|||^2 A(u) \geq \sum\limits_{\varphi\in\omega_n} \Big\| \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(i)e_i \Big\|_p^2$. Or pour tout $\varphi \in \omega_n$, on a $\| \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(i)e_i\|_p = n^{1/p}$ donc $|||u^{-1}|||^2 A(u) \geq 2^n n^{2/p}$. D'où l'inégalité.

3) Grâce aux questions 2a. et 2b., on obtient que pour tout $u \in GL(\ell_n^p, \ell_n^2)$, on a $|||u^{-1}||| |||u||| \geq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ et par conséquent $d(\ell_n^p, \ell_n^2) \geq (\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \ln(n)$. Ce qui donne le résultat pour $p \leq 2$.

Pour conclure dans le cas $p \geq 2$, nous présentons deux arguments.

Argument 1 : reprendre tout simplement les encadrements 2a. et 2b. en utilisant les mêmes idées. On obtient ainsi les inégalités $A(u) \leq 2^n |||u|||^2 n^{2/p}$ (en n'utilisant pas la question 1.) et $A(u) \geq 2^n n |||u^{-1}|||^{-2}$ (via la question 1.). On conclut alors $d(\ell_n^p, \ell_n^2) \geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) \ln(n)$.

Argument 2 : par dualité. Soit $p \geq 2$, l'entier conjugué q est alors dans $[1, 2]$ et l'espace $(\ell_n^p)^*$ est isométrique à ℓ_n^q (cf. partie I); de même ℓ_n^2 est isométrique à son dual (ce qui correspond à $p = q = 2$ mais est bien sûr connu dans le cours de façon générale pour les euclidiens). D'après la question III.4.b., on a $d(\ell_n^p, \ell_n^2) = d((\ell_n^p)^*, (\ell_n^2)^*)$. Comme $d(\ell_n^q, (\ell_n^p)^*) = d(\ell_n^2, (\ell_n^2)^*) = 0$ d'après III2b., on obtient que $d(\ell_n^p, \ell_n^2) = d(\ell_n^q, \ell_n^2)$ puis que $d(\ell_n^p, \ell_n^2) \geq (\frac{1}{q} - \frac{1}{2}) \ln(n)$, car $q \leq 2$. Enfin, comme $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, on conclut.

4)a) Par homogénéité de la norme, il suffit de le faire pour $\|x\|_p = 1$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq 1$. Comme $p' \geq p$, on a alors $|x_n|^{p'} \leq |x_n|^p$ puis en sommant sur n, on obtient $\|x\|_{p'} \leq 1$.

4)b) Fixons $p \leq 2$ et considérons effectivement l'application : $U : \ell_n^p \to \ell_n^2$ qui à x associe lui-même. D'après 4a., on a $|||U||| \leq 1$ (en fait, en prenant un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on s'aperçoit que $|||U||| = 1$). Calculons la norme de U^{-1} : pour cela nous appliquons l'inégalité de Hölder (cf. I2.) avec $\frac{2}{p}$ et $\frac{2}{2-p}$ pour obtenir pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{k=1}^{n} |x_n|^p \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} 1\Big)^{1-p/2} . \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_n|^2\Big)^{p/2} = n^{1-p/2} \|x\|_2^p.$$

On en déduit $|||U^{-1}||| = \sup\limits_{\|x\|_2 \neq 0} \dfrac{\|x\|_p}{\|x\|_2} \leq n^{1/p-1/2}$. Ainsi $d(\ell_n^p, \ell_n^2) \leq (\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \ln(n)$.

Pour conclure pour tout p, on peut procéder comme dans la question 3. : soit on recommence les estimations précédentes pour $p \geq 2$ (toujours via Hölder avec cette fois $\frac{p}{2}$ et $\frac{p}{p-2}$), soit en argumentant par dualité pour remarquer que $d(\ell_n^p, \ell_n^2) = d(\ell_n^q, \ell_n^2)$, où $q \leq 2$ si $p \geq 2$, et on conclut alors immédiatement.

4)c) Nous présentons l'argument le plus rapide : comme précédemment, par dualité (le dual de ℓ_n^∞ est isométrique à ℓ_n^1 d'après I5b.), on a $d(\ell_n^\infty, \ell_n^2) = d(\ell_n^1, \ell_n^2) = \frac{1}{2} \ln(n)$. Bien sûr, on remarque que cela correspond à extrapoler à $p = \infty$ l'égalité du b.

Partie V.

1) Lemme d'Auerbach. Comme E est de dimension finie, la sphère unité S_E est compacte donc $(S_E)^n$ est aussi compact. D'autre part, l'application Λ est continue comme restriction de l'application déterminant sur E^n, elle même continue (cf. cours), car c'est une application multilinéaire en dimension finie (par exemple). Cette application Λ est donc bornée et atteint son maximum en $(b_1, \ldots, b_n) \in (S_E)^n$. On a bien sûr pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\|b_i\| = 1$ et $\Lambda(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$ car sinon l'application Λ serait nulle (ce qui est faux en prenant l'image des vecteurs de β, normalisés). Ainsi, $(b_1, \ldots, b_n)$ est une base de E.

Notons φ_i l'application suggérée par l'énoncé pour $(x_1, \ldots, x_n) = (b_1, \ldots, b_n)$. On remarque que $\varphi_i(b_j) = \delta_{i,j}$, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Enfin, par définition de $(b_1, \ldots, b_n)$, pour $x \in S_E$, $\varphi_i(x) \leq 1$ donc $|||\varphi_i||| \leq 1$; et comme $\varphi_i(b_i) = 1$, on conclut que $|||\varphi_i||| = 1$.

2) On pourrait vérifier "à la main" les différents axiomes d'une norme mais ν est en fait la norme 1 associée aux coordonnées dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$, dont la base duale est $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Soit Φ l'application de E_1 dans ℓ_1^n qui à x associe $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$. Elle est linéaire et pour tout $x \in E_1$, on a $\|\Phi(x)\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |\varphi_j(x)| = \nu(x)$.

3) On en déduit que $d(E_1, \ell_n^1) = 0$ donc que $d(E, \ell_n^1) = d(E, E_1)$. Soit J_1 l'identité formelle de $(E, \|.\|)$ dans $E_1 = (E, \nu)$: $J_1(x) = x$. C'est évidemment un isomorphisme et pour tout $x \in E$, on a (comme $|||\varphi_j||| = 1$) $\|J_1(x)\| = \sum\limits_{j=1}^{n} |\varphi_j(x)| \leq n\|x\|$. Donc $|||J_1||| \leq n$.

Pour tout $x \in E$, on a aussi $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(x) b_j$ donc $\|x\| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |\varphi_j(x)|.\|b_j\| = \nu(x)$, car les vecteurs b_j sont unitaires. Ainsi $|||J_1^{-1}||| \leq 1$.

Finalement, on a $d(E, E_1) \leq \ln(|||J_1|||.|||J_1^{-1}|||) \leq \ln(n)$ donc $d(E, \ell_n^1) \leq \ln(n)$.

Partie VI.

1) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence car : elle est réflexive ($X \in \mathcal{E}_n$ est isométrique á lui-même, via l'identité). Elle est symétrique car si u est une isométrie de $X \in \mathcal{E}_n$ dans $Y \in \mathcal{E}_n$ alors (par égalité des dimensions) u est bijective et u^{-1} est une isométrie de Y dans X. Enfin, $\mathcal{R}$ est transitive car si u est une isométrie de $X \in \mathcal{E}_n$ dans $Y \in \mathcal{E}_n$ et v est une isométrie de Y dans $Z \in \mathcal{E}_n$ alors $v \circ u$ est une isométrie de X dans Z.

Il s'agit enfin de justifier que pour tous $X, X', Y, Y' \in \mathcal{E}_n$ tels que $X\mathcal{R}X'$ et $Y\mathcal{R}Y'$, on a $d(X, Y) = d(X', Y')$. Rappelons l'argument (déjà utilisé) : d'après III3., on a $d(X, Y) \leq d(X, X') + d(X', Y') + d(Y, Y')$ or $d(X, X') = d(Y, Y') = 0$ donc $d(X, Y) \leq d(X', Y')$. Puis par symétrie, on conclut à l'égalité.

2)a) Le caractère borné est immédiat : pour tout $f \in \Phi_n$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x \in B_1} f(x)| \leq 1$

i.e. Φ_n est inclus dans la boule unité de $C(B_1)$.

Montrons que Φ_n est fermé. Pour cela, soit $(f_j)_{j\geq 0}$ une suite de Φ_n convergente vers f dans $C(B_1)$, où f_j est la restriction à B_1 d'une certaine norme μ_j. On définit alors $x \in \mathbb{R}^n$: $\mu(x) = \|x\|_1 f(\frac{x}{\|x\|_1})$ si x est non nul et $\mu(0) = 0$.

On remarque immédiatement que μ est la limite simple sur $\mathbb{R}^n$ de $(\mu_j)_{j\geq 0}$: pour tout x non nul, $\mu(x) = \|x\|_1 \lim f_j(\frac{x}{\|x\|_1}) = \|x\|_1 \lim \mu_j(\frac{x}{\|x\|_1}) = \lim \mu_j(x)$. En 0, c'est trivial.

Justifions que μ est une norme. Pour l'homogénéité et l'inégalité triangulaire, cela découle de la remarque précédente (une limite simple de semi-normes est une semi-norme) : pour tout réel t et tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\mu(tx) = \lim \mu_j(tx) = |t| \lim \mu_j(x) = |t|\mu(x)$; pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\mu(x+y) = \lim \mu_j(x+y) \leq \lim(\mu_j(x) + \mu_j(y)) = \mu(x) + \mu(y)$. Enfin, pour tout x non nul, on a $\mu(x) = \lim \mu_j(x) \geq \dfrac{1}{n}\|x\|_1$, par définition de Φ_n. Ainsi, $\mu(x) > 0$.

Enfin, f est bien dans Φ_n car pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la norme μ vérifie $\mu(x) \geq \dfrac{1}{n}\|x\|_1$ et $\mu(x) = \lim \mu_j(x) \leq \|x\|_1$.

2)b) Ceci est dû au fait que toutes les applications de Φ_n sont 1-lipschitziennes : pour tout $f \in \Phi_n$, restriction à B_1 d'une certaine norme $\|.\|$, on a pour tous $x, y \in B_1$, $|f(x) - f(y)| \leq \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\| \leq \|x - y\|_1$. Il suffit donc de choisir $\delta = \varepsilon$.

3)a) D'abord τ est bien définie car il y a une unique norme associée à $f \in \Phi_n$: si deux normes coïncident sur une boule (de rayon strictement positif !) alors, par homogénéité, elles coïncident sur $\mathbb{R}^n$.

Montrons que τ est surjective : soit $\hat{X} \in \hat{\mathcal{E}}_n$ où $X = (\mathbb{R}^n, \|.\|)$. D'après V.3., $d(x, \ell_n^1) \leq \ln(n)$, ou encore, il existe un automorphisme de $\mathbb{R}^n$, $u : \ell_n^1 \to X$, avec $|||u||| = 1$ et $|||u^{-1}||| \leq n$. En posant $N(x) = \|u(x)\|$, on obtient une norme sur $\mathbb{R}^n$ qui vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $N(x) \leq \|x\|_1$ et $N(x) \geq |||u^{-1}|||^{-1}.\|x\|_1 \geq \frac{1}{n}\|x\|_1$. Ainsi, d'une part $f = N_{|B_1} \in \Phi_n$ et d'autre part, $X' = (\mathbb{R}^n, N)$ est isométrique à X, via u, donc $\hat{X}' = \hat{X}$. Ainsi, $\tau(f) = \hat{X}$.

3)b) Continuité de τ. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, f_j, resp. f, est la restriction à B_1 d'une certaine norme N_j, resp. N, et on a $\hat{d}(\tau(f_j), \tau(f)) \leq \ln(|||I_j|||.|||I_j^{-1}|||)$, où I_j est l'identité de $(\mathbb{R}^n, N)$ dans $(\mathbb{R}^n, N_j)$. On remarque que par homogénéité, $|||I_j||| = \sup\limits_{\|x\|_1=1} \dfrac{N_j(x)}{N(x)}$. Ainsi

$$|||I_j||| = \sup_{\|x\|_1=1} \frac{f_j(x)}{f(x)} \leq 1 + \sup_{\|x\|_1=1} \frac{|f_j(x) - f(x)|}{f(x)} \leq 1 + nN_\infty(f_j - f)$$

car comme $f \in \Phi_n$, pour tout x tel que $\|x\|_1 = 1$, on a $f(x) = N(x) \geq \dfrac{1}{n}$.

De même, comme pour tout x tel que $\|x\|_1 = 1$ et tout $j \in \mathbb{N}$, $f_j = N_j(x) \geq \dfrac{1}{n}$, on a

$$|||I_j^{-1}||| = \sup_{\|x\|_1=1} \frac{f(x)}{f_j(x)} \leq 1 + \sup_{\|x\|_1=1} \frac{|f_j(x) - f(x)|}{f_j(x)} \leq 1 + nN_\infty(f_j - f).$$

On en déduit que $\hat{d}(\tau(f_j), \tau(f)) \leq 2\ln\Big(1 + nN_\infty(f_j - f)\Big)$, qui tend donc vers 0.

4) Soit $(\hat{X}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de $\hat{\mathcal{E}}_n$. D'après 3a., il existe $f_j \in \Phi_n$ tel que $\tau(f_j) = \hat{X}_j$. D'après 2. et le résultat admis (Ascoli), on peut extraire une sous-suite $(f_{j_p})_{p\in\mathbb{N}}$ convergente dans Φ_n. D'après 3b., $(\hat{X}_{j_p})_{p\in\mathbb{N}} = (\tau(f_{j_p}))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $(\hat{\mathcal{E}}_n, \hat{d})$.