Licence - Master 1 de Mathématiques

Université d'Artois

Exercices de Variable Complexe

P. Lefèvre

1 Révisions : Séries Entières

Rappel : justifier la formule de Hadamard : $R = \left(\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$.

Exercice 1.1 Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes :

$$(1)\ \sum_{n=0}^{+\infty} e^n z^{n^2} \qquad (2)\ \sum_{n=0}^{+\infty} n! z^{n^2} \qquad (3)\ \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \frac{(-1)^n}{n})^{n^2} z^n.$$

Exercice 1.2 Développer en série entière les fonctions suivantes :

$$f(z) = \frac{1}{1+z+z^2} \qquad g(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^3)} \qquad h(z) = \frac{z \sin a}{z^2 - 2(\cos a)z + 1}.$$

Indication : décomposer en éléments simples ou utliser les formules sur les produits de séries entières.

Exercice 1.3 Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini. On suppose que : $\exists k \in \mathbb{N},\ \exists a, b > 0,\ \forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq a|z|^k + b$. Montrer que f est un polynôme.

Indication : on pourra développer en série de Fourier la fonction $t \mapsto f(re^{it})$ où $r > 0$ et montrer que a_n est nul pour $n > k$.

Exercice 1.4 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que $\sum a_n$ converge. Montrer que la convergence de la série entière est uniforme dans un secteur angulaire de sommet A $(z = 1)$ de bissectrice intérieure AO et de mesure inférieure strictement à π.

Indication : on fixe $\alpha \in [0, \pi/2[$ et on veut montrer que la convergence est uniforme sur $S_\alpha = \{z = 1 - re^{i\theta} \in \mathbb{C} |\, r \geq 0,\ |z| < 1,\ |\theta| \leq \alpha\}$. On pourra effectuer une transformation d'Abel : on fixe $\varepsilon > 0$ et on introduit les restes partiels de la série des a_n ($r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$); on majorera alors uniformément pour $z \in S_\alpha$ les tranches de Cauchy : $\sum_{n=p}^{q} a_n z^n$.

Exercice 1.5 On s'intéresse à une réciproque du résultat précédent : on suppose que $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence 1 telle que $\lim_{x\to 1^-} \sum a_n x^n$ existe. Est-ce que $\sum a_n$ converge ? Montrer que ceci est faux en général.

Montrer que si on ajoute l'hypothèse $a_n = o(1/n)$ alors c'est vrai (th. de Tauber).

Exercice 1.6 Développer en série entière sur $\mathbb{R}$: $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$.

Indication : on peut montrer que f vérifie une équation différentielle simple.

Exercice 1.7 Soient deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ avec $b_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda \neq 0$. On suppose que $\sum b_n x^n$ est de rayon de convergence 1 et divergente en 1.

Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est de rayon de convergence 1 et que $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sum a_n x^n}{\sum b_n x^n} = \lambda$.

Indication : commencer par montrer que la série de terme général b_n diverge (on pourra minorer une somme partielle à l'aide d'une somme partielle des $b_n x^n$ via un argument de continui$\hat{}$e puis conclure). Ensuite on raisonnera comme dans le théorème de Césaro.

Exercice 1.8 Résoudre l'équation $(1+x^2)y'' - 2y = 0$ en cherchant des solutions développables en série entière.

Exercice 1.9 Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et développable en série entière sur $]-1,1[$.

Indication : on pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange.

Exercice 1.10 Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(z)$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de chaque point de $\overset{\circ}{D}(0,R)$.

Exercice 1.11 Propriétés de la fonction exponentielle : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} z^n$.

Montrer que exp est continue. Etablir $\exp(0) = 1$ et $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\exp(a+b) = \exp(a).\exp(b)$.

On définit $e = \exp(1)$. On note alors $\exp(z) = e^z$.

Etablir les résultats suivants :

a) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$. **b)** La dérivée de exp est exp. **c)** $\exp_{|\mathbb{R}}$ est croissante, positive et $e^x \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ et $e^x \to 0$ quand $x \to -\infty$. **d)** Il existe un nombre positif π tel que $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et tel que $e^z = 1$ ssi $z/2i\pi$ est un entier relatif. **e)** exp est périodique de période $2i\pi$. **f)** $t \to e^{it}$ est une surjection de $\mathbb{R}$ sur le cercle unité. **g)** $\forall w \in \mathbb{C}^*$, $\exists z \in \mathbb{C}$ tel que $w = e^z$.

2 Premiers contacts avec l'holomorphie

Révisions sur la connexité :

Exercice 2.1 Montrer que toute sphère d'un espace métrique connexe non borné est non vide.

Exercice 2.2 Montrer que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est une surjection continue alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{a\})$ est non borné. Indication : sinon il existe a dont l'image réciproque est bornée donc incluse dans un disque, dont le complémentaire est connexe...

Exercice 2.3 Théorème de Runge. Soient K un compact de $\mathbb{C}$ de complémentaire connexe et $a \in K^c$. On veut montrer que $z \to \varphi_a(z) = \dfrac{1}{z-a}$ est limite uniforme de polynômes dans $C(K)$.

On note $P(K)$ l'adhérence des polynômes dans $C(K)$. Soit $A = \{a \in K^c |\ \varphi_a \in P(K)\}$.

a) Montrer que $A \neq \emptyset$ (*montrer que si a est de module assez grand, alors $a \in A$*).

b) Montrer que A est fermé et ouvert dans K^c puis conclure. Indication : pour fermé montrer que si $d = d(a, K)$ alors la norme dans $C(K)$ de $\varphi_{a_n} - \varphi_a$ est bornée par $2/d|a - a_n|$ pour a_n assez proche de a. Pour ouvert, montrer que le disque de centre a et de rayon $d/2$ est inclus dans A (remarquer que $P(K)$ est une algèbre).

Propriétés de la fonction logarithme :

Exercice 2.4 *Log* est la détermination principale du logarithme. Soient $z_1 = 2i$ et $z_2 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$. Calculer (si cela a un sens) $Log(z_1)$; $Log(z_2)$; $Log(z_1.z_2)$; $Log(z_1^2)$; $Log(z_2^2)$; $Log(\frac{z_1}{z_2})$.

Exercice 2.5 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, déterminer la valeur principale de z^i. Trouver la valeur principale de i^i.

Exercice 2.6 Montrer qu'une détermination de arcsin (c'est à dire une fonction a vérifiant $\sin(a(z)) = z$) telle que $\arcsin(0) = 0$ est $z \mapsto \frac{1}{i}\mathrm{Log}(iz + \sqrt{1-z^2})$ où *Log* est la détermination principale. Sur quel domaine cette formule est valable ? Montrer qu'il s'agit d'un prolongement de $\arcsin_{|]-1,1[}$ (réelle).

Fonctions holomorphes :

Exercice 2.7 Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(x, y) = x + iy^2$. Montrer que f est $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Calculer sa différentielle. Existe-t-il un ouvert U de $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ et $h \in H(U)$ tels que $h(x + iy) = f(x, y)$ pour $x + iy \in U$?

Exercice 2.8 Soit U un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$.

a) Soit $f \in H(U)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

i) f est constante. **ii)** $P = \mathrm{Re}(f)$ est constante. **iii)** $Q = \mathrm{Im}(f)$ est constante.

iv) $\bar{f} \in H(U)$. **v)** $|f|$ est constant.

b) Soient $f, g \in H(U)$. On suppose que g ne s'annule pas dans U et que $f(z)\bar{g}(z) \in \mathbb{R}$ pour $z \in U$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $f = cg$.

Exercice 2.9 Soit $U = \{z = x + iy \in \mathbb{C} |\ -\pi < x < \pi,\ y \in \mathbb{R}\}$. Soit $P(x, y) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x) + \mathrm{ch}(y)}$ pour $x + iy \in U$. Montrer qu'il existe $f \in H(U)$, unique, telle que $f(0) = 0$ et $P = \mathrm{Re}(f)$.

Exercice 2.10 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose $P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in H(\mathbb{C})$ telle que $P = \mathrm{Re}(f)$.

b) Cette condition étant supposée remplie, déterminer toutes les applications $f \in H(\mathbb{C})$ telles que $P = \mathrm{Re}(f)$.

3 Théorie de Cauchy

$\mathbb{D}$ désigne le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

Exercice 3.1 Soient $r \in]0,1[$ et $M \in \mathbb{R}^+$.

On suppose que $f \in H(\mathbb{D})$ vérifie $f(0) = a_0 \in \mathbb{C}^*$ et $|f(z)| \leq M$ pour $|z| = r$. Montrer que si f s'annule en $z_0 \in r\mathbb{D}$ alors $|z_0| \geq \dfrac{r|a_0|}{(M+|a_0|)}$.

Indication : utiliser la formule de Cauchy pour f en z_0 puis montrer que

$$a_0 = \frac{-1}{2i\pi}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{z_0}{z}\Big)^n dz.$$

Exercice 3.2 Soit $f \in H(\mathbb{D})$ dont le développement en série entière s'écrit : $\sum_0^\infty a_n z^n$. On suppose que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|f(z)|(1-|z|) \leq 1$. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| < e(n+1)$. Indication : formules de Liouville.

Exercice 3.3 Soient $R \in \mathbb{R}^{+*}$, $U = R.\mathbb{D}$ et $f = \sum_0^\infty a_n z^n \in H(U)$. On note $P = Re(f)$ et $Q = Im(f)$.

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall r \in]0,R[$, établir :

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} P(re^{it})e^{-int}dt = \frac{i}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} Q(re^{it})e^{-int}dt.$$

Indication : utiliser la formule de Cauchy (avec $\displaystyle\int f(z)/z^{n+1}dz$ et $\displaystyle\int f(z)z^{n-1}dz$) ou des méthodes de Fourier.

b) Dans cette question, on suppose $f(0)$ réel. Prouver que pour $r \in]0,R[$ et $z \in r\mathbb{D}$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{it})\frac{r+ze^{-it}}{r-ze^{-it}}dt.$$

c) On suppose dans cette question que $2a_0 = 1$, $R = 1$ et $P \geq 0$ sur $\mathbb{D}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq 1$.

d) Soient $A \in \mathbb{R}$ et $r \in [0,R[$. On suppose que $P(z) \leq A$ pour tout $z \in U$. Prouver que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq |a_0| + \frac{2r}{R-r}(A - Re(a_0)).$$

(*Indication : on se ramènera à c) en utilisant $\alpha + \beta f(Rz)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ bien choisis.*)

Exercice 3.4 Soient $R \in \mathbb{R}^{+*}$, $U = R.\mathbb{D}$ et $f = \sum_0^\infty a_n z^n \in H(U)$, bornée sur U. On note $P = Re(f)$, $N_f = \sup\{|f(u) - f(v)|;\ u, v \in U\}$ et $\Delta_f = \sup\{|P(u) - P(v)|;\ u, v \in U\}$.

a) $\forall r \in]0,R[$, établir : $a_1 = \dfrac{1}{4\pi r}\displaystyle\int_0^{2\pi} [f(re^{it}) - f(-re^{it})]e^{-it}dt$.

b) Montrer que $|a_1|R \leq \dfrac{1}{2}N_f$. Examiner le cas où $f(z) = z$; que peut-on en conclure ?

c) Etablir $|a_1|R \leq \dfrac{2}{\pi}\Delta_f$ (*on démontrera d'abord le résultat pour a_1 réel* puis on écrira $a_1 = |a_1|e^{i\alpha}$ et on introduira $f_\alpha(z) = f(e^{-i\alpha}z)$). Indication : on utilisera la formule de l'exo 3.a. pour exprimer a_1.

On note Log la détermination principale du logarithme. Soit $\rho > R$, étudier le cas où $f(z) = \dfrac{1}{2i}\mathrm{Log}\big(\frac{\rho-z}{\rho+z}\big)$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3.5 Soient $R \in \mathbb{R}^{+*}$, $U = R.\mathbb{D}$ et $f = \sum_0^\infty a_n z^n \in H(U)$. On note $P = Re(f)$, $Q = Im(f)$. Pour $r \in]0, R[$, on pose

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt.$$

a) Etablir : $I(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$.

b) On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Montrer que $I(r) > 0$ pour tout $r \in]0, R[$.

Montrer que, pour $r \in]0, R[$, $\ln(I(r))$ est une fonction convexe de $\ln(r)$. Indication : montrer que $J(s) = I(e^s)$ vérifie $J.J'' - J'^2 \geq 0$.

c) On fixe $r \in]0, R[$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $|P(0)| = |Q(0)|$.

ii) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(re^{it})|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q(re^{it})|^2 dt$.

Indication : appliquer Cauchy à f^2.

Exercice 3.6 Calculer $I = \int_\gamma \bar{z} dz$ où γ est le chemin joignant le point $(1, 1)$ au point $(2, 4)$ le long de la parabole $y = x^2$.

Exercice 3.7 Soients $m, n \in \mathbb{Z}^*$ et γ_1, γ_2 des lacets de classe C^1 tels que $0 \notin \mathrm{Im}\gamma_1 \cup \mathrm{Im}\gamma_2$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $\gamma(t) = \gamma_1^m(t)\gamma_2^n(t)$.

Vérifier que γ est un lacet de classe C^1 tel que $0 \notin \mathrm{Im}\gamma$. Calculer $Ind_\gamma(0)$ en fonction de $Ind_{\gamma_1}(0)$ et $Ind_{\gamma_2}(0)$.

Exercice 3.8 Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ un lacet de classe C^1. Pour $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\gamma_n(t) = \gamma(nt - E(nt))$ (où $E(x)$: partie entière de x).

a) Montrer que γ_n est un lacet de classe C^1 par morceaux.

b) Pour $z \notin \mathrm{Im}\gamma$, évaluer $Ind_{\gamma_n}(z)$ en fonction de n et $Ind_\gamma(z)$.

Exercice 3.9 Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $\gamma(t) = a \cos t + ib \sin t$ où $t \in [0, 2\pi]$. Calculer

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z} \qquad J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$$

Exercice 3.10 Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\bar{\mathbb{D}}$ et $f \in H(U)$. Pour $t \in [0, 2\pi]$, on pose $\gamma(t) = e^{it}$.

a) Calculer $I_1 = \int_\gamma (2 + z + \frac{1}{z}) \frac{f(z)}{z} dz$ et $I_2 = \int_\gamma (2 - z - \frac{1}{z}) \frac{f(z)}{z} dz$.

b) En déduire la valeur de $\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2 \frac{t}{2} dt$ et de $\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \sin^2 \frac{t}{2} dt$.

c) Pour $|a| \neq 1$, évaluer $I(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z - a} dz$.

Exercice 3.11 Pour $t \in [0,1]$, on pose $\Gamma(t) = \sqrt{2} \exp i(2\pi t - \frac{\pi}{4})$ et

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 + i(8t-1) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ 3 - 8t + i & \text{si} \quad \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 + i(5-8t) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ 8t - 7 - i & \text{si} \quad \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

a) Vérifier que γ est un lacet de classe C^1 par morceaux. Calculer $Ind_\gamma(0)$.
b) Retrouver ce résultat en utilisant une homotopie dans $\mathbb{C}^*$ de γ sur Γ.

Exercice 3.12 Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\bar{\mathbb{D}}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application C^1 telle que $f(\bar{\mathbb{D}}) \subset \bar{\mathbb{D}}$. Si $s \in [0,1]$, on définit les lacets $\gamma_s(t) = f(se^{2i\pi t}) - se^{2i\pi t}$ et $\Gamma_s = sf(e^{2i\pi t}) - e^{2i\pi t}$ pour $t \in [0,1]$.

On suppose que pour tout $z \in \bar{\mathbb{D}}$, $f(z) \neq z$.
a) Pour $s \in [0,1]$, déterminer $Ind_{\gamma_s}(0)$ et $Ind_{\Gamma_s}(0)$.
b) En déduire une contradiction et prouver ainsi que f admet au moins un point fixe dans $\bar{\mathbb{D}}$.

Exercice 3.13 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_\gamma \frac{\sin(\pi e^{i\pi z})}{(z-1)^3} dz$$

où γ est le cercle de centre 0, de rayon 2 parcouru dans le sens trigonométrique.

$$\int_\gamma \frac{e^{i\pi z}}{(z-1)^2} dz$$

où γ est la réunion du cercle de centre 0, de rayon 2 parcouru dans le sens trigonométrique et du cercle de rayon $\frac{1}{2}$ parcouru dans le sens opposé.

4 Principe du maximum

$\mathbb{D}$ désigne le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

Exercice 4.1 Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\bar{\mathbb{D}}$. On suppose que $f \in H(U)$ vérifie $f(0) = 1$ et que $|f(z)| > 1$ sur $\partial\mathbb{D}$. Montrer que f possède au moins un zéro dans $\mathbb{D}$.
Indication : considérer $1/f$.

Exercice 4.2 Refaire l'exercice 3.1. (introduire la fonction $z \neq z_0 \mapsto f(z)/(z - z_0)$)

Exercice 4.3 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$.
Montrer que, pour $0 < r \leq R$, on a $M(R)R^{-n} \leq M(r)r^{-n}$ où $M(r) = \sup\{|P(re^{it})|;\ t \in \mathbb{R}\}$.
Indication : considérer $z \mapsto z^n P(1/z)$.

Exercice 4.4 Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On considère $f_1, \cdots, f_n \in H(U)$ tels que, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $f_k(U) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$; et $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Pour $z \in U$, on pose

$$g(z) = \prod_{k=1}^{n} |f_k(z)|^{\alpha_k}.$$

Montrer que si g a un maximum relatif en un point a de U alors g est constante sur U.

Exercice 4.5 Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in H(U)$ non constante et $V = \{\bar{z}|\ z \in U\}$. On pose $g(z) = f(\bar{z})$ pour $z \in V$.
a) Existe-t-il un ouvert W de V, non vide, tel que $g_{|W} \in H(W)$?
b) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{C}$ telle que $\sum n|a_n|$ converge et est non nulle. On pose $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Montrer que $h \in H(\mathbb{D}) \cap C(\bar{\mathbb{D}})$.
c) On définit $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $F(z) = z + h(\bar{z})$ si $|z| \leq 1$ et $F(z) = z + h(z^{-1})$ si $|z| \geq 1$. Prouver que $F \in C(\mathbb{C}) \cap H(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})$ et que $F \notin H(W)$ pour tout ouvert non vide $W \subset \mathbb{D}$.
d) Soit $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ qui à t associe e^{it}. Pour $n \in \mathbb{Z}$, évaluer $I_n = \int_\Gamma z^n F(z)dz$.

Exercice 4.6 Soit $f \in H(\mathbb{D})$ sans zéros. Montrer qu'il existe une suite de points de $\mathbb{D}$ dont le module converge vers 1 et l'image par f est bornée. (on pourra introduire $1/f$)

Exercice 4.7 Théorème des trois cercles de Hadamard.
Soient $0 < r < R$. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant la couronne $C = \{z \in \mathbb{C}|\ r \leq |z| \leq R\}$.
On considère $f \in H(U)$ et on pose $M(\rho) = \sup\{|f(z)|;\ |z| = \rho\}$, où $\rho \in [r, R]$.

a) Pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\rho^{\frac{p}{q}} M(\rho) \leq \max\{r^{\frac{p}{q}} M(r), R^{\frac{p}{q}} M(R)\}$.
Indication : on pourra faire intervenir $g(z) = z^p (f(z))^q$.

b) On suppose que $M(r)$ et $M(R)$ sont non nuls.
En considérant $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $r^\alpha M(r) = R^\alpha M(R)$, montrer que

$$(H) \qquad M(\rho) \leq M(r)^{\frac{\ln(R)-\ln(\rho)}{\ln(R)-\ln(r)}}.M(R)^{\frac{\ln(\rho)-\ln(r)}{\ln(R)-\ln(r)}}.$$

c) On suppose que $M(r) = 0$ ou $M(R) = 0$. Est-ce que (H) est encore vrai ?

Exercice 4.8 Inégalité de Borel-Caratheodory.

Soient $A,\rho\in\mathbb{R}^{+*}$, $R\in]0,\rho[$ et $U=\overset{\circ}{D}(0,\rho)$.

a) Déterminer $B=\sup\{|g(z)|;\ z\in\mathbb{C},\ Re(z)\leq A\}$ avec $g(z)=\dfrac{z}{2A-z}$.

b) Soit $h\in H(U)$ tel que $h(0)=0$ et $\mathrm{Re}(h(z))\leq A$ pour tout $z\in U$. Montrer que pour tout $|z|<R$, on a $|h(z)|\leq\dfrac{2A|z|}{R-|z|}$. (*on pourra introduire la fonction* $g[h(Rz)]$)

Dans la suite $f\in H(U)$. On pose $M(r)=\sup\{|f(z)|;\ |z|=r\}$ et $m(r)=\sup\{Re(f(z));\ |z|=r\}$.

c) Montrer que M est croissante et continue sur $[0,\rho[$. Prouver que si f n'est pas constante, M est strictement croissante.

d) Montrer que m est croissante et continue sur $[0,\rho[$.

e) On suppose que $f(0)=0$. Pour $r\in[0,R]$, montrer que $M(r)\leq\dfrac{2r}{R-r}m(R)$.

f) Soit $r\in[0,R[$, montrer que $M(r)\leq\dfrac{2r}{R-r}m(R)+\dfrac{R+r}{R-r}|f(0)|$.

Exercice 4.9 Soient $a,b\in\mathbb{D}$ distincts et $f\in H(\mathbb{D})$ telle que $f(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$.

a) Etablir pour tout $z\in\mathbb{D}$: $\Big|\dfrac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)}\Big|\leq\Big|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\Big|$. Que peut-on dire s'il existe $z\in\mathbb{D}\backslash\{a\}$ pour lequel l'inégalité précédente est une égalité ?

Indication : utiliser les fonctions $\varphi_u(z)=\dfrac{z-u}{1-\bar{u}z}$ où $u\in\mathbb{D}$, introduire la fonction $g=\varphi_{f(a)}\circ f\circ\varphi_{-a}$ puis utiliser le lemme de Schwarz.

b) Prouver que pour tout $z\in\mathbb{D}$: $|f'(z)|\leq\dfrac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$ et $\dfrac{|f(0)|-|z|}{1+|zf(0)|}\leq|f(z)|\leq\dfrac{|f(0)|+|z|}{1-|zf(0)|}$.

c) Soit $r\in]0,1[$ tel que $a,b\in\bar{D}(0,r)$. Etablir : $\dfrac{|f(a)-f(b)|}{|a-b|}\leq\dfrac{1}{1-r^2}$.

Dans la suite, on suppose que $|a|=|b|=r>0$, que $f(0)=0$ et que $f(a)=f(b)=\alpha$.

d) Montrer que, pour $z\in\mathbb{D}$, on a $\Big|\dfrac{f(z)-\alpha}{1-\overline{\alpha}f(z)}\Big|\leq\Big|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\Big|.\Big|\dfrac{z-b}{1-\bar{b}z}\Big|$.

Pour cela, on pourra utiliser la fonction $z\neq a\mapsto\dfrac{\varphi_{f(a)}\circ f(z)}{\varphi_a(z)}$

En déduire $|\alpha|\leq r^2$.

e) On suppose que $|f'(0)|=\beta\neq 0$. Montrer que, pour $|z|=r$, on a $r(\beta-r)\leq(1+\beta r)|f(z)|$. (*on pourra utiliser la fonction* $z\mapsto\eta z^{-1}f(z)$ *où* $\eta<1$.)

5 Prolongement analytique.

$\mathbb{D}$ désigne le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

Exercice 5.1 Montrer que les séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ sont des prolongements analytiques l'une de l'autre.

Exercice 5.2 Montrer que la série entière $f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ ne peut être prolongée analytiquement (ni même continument) au voisinage d'aucun point de $\partial\mathbb{D}$. Indication : remarquer que $f(z) = z + f(z^2)$ et montrer d'abord que l'on ne peut prolonger f au voisinage de 1 et on se rappellera que $\{a \in \partial\mathbb{D}|\,, \exists p \in \mathbb{N},\, a^{2^p} = 1\}$ est dense dans le cercle unité.

Exercice 5.3 Soit f une série entière de rayon de convergence 1. Montrer qu'il y a au moins un point singulier sur $\partial\mathbb{D}$ (i.e. un point où il n'existe aucun disque ouvert D' tel que f se prolonge analytiquement à $\mathbb{D} \cup D'$). (Indication : en supposant le contraire, il existe un disque ouvert D_a de centre a pour tout $a \in \partial\mathbb{D}$ tel que f se prolonge en f_a sur $\mathbb{D} \cup D_a$. Montrer que $D_a \cap D_b \neq \emptyset \Rightarrow f_a = f_b$ sur $D_a \cap D_b$. Considérer $\Omega = \cup_a(\mathbb{D} \cup D_a)$ et montrer que $F(z) = f_a(z)$ pour $z \in \mathbb{D} \cup D_a$ est bien définie et holomorphe sur un disque $D(0,r)$ avec $r > 1$)

Exercice 5.4 Théorème des lacunes de Hadamard. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers strictement positifs telle que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$ pour tout n. On suppose que la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$ est de rayon de convergence 1. On veut montrer que $\partial\mathbb{D}$ est une coupure (i.e. tout point de $\partial\mathbb{D}$ est singulier (déf. cf exo 3)).

On fixe un entier $p \geq 1$ tel que pour tout n, $p\lambda_{n+1} > (p+1)\lambda_n$ (justifier). On suppose que f admet un prolongement analytique g dans $\mathbb{D} \cup D(1,t)$ où $0 < t < 1$.

a) Montrer qu'il existe $R > 1$ tel que $R^p\sqrt{4R^2 - \dfrac{t^2}{(p+1)^2 R^{2p}}} < 2$.

On pose $\delta = \dfrac{t}{(p+1)R^p}$.

b) Montrer que $|z| < R \Longrightarrow w := \frac{z^p(1+z)}{2} \in \mathbb{D} \cup D(1,t)$. (*on pourra séparer les cas* $|z-1| < \delta$ *et* $|z-1| \geq \delta$)

c) En déduire qu'il existe $(b_n)_{n\geq 0}$ tel que $z \to g(\frac{z^p+z^{p+1}}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ pour $z \in D(0,R)$.

d) Montrer que pour tout entier $N \geq 1$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\sum_{n=1}^{N} a_n (\dfrac{z^p + z^{p+1}}{2})^{\lambda_n} = \sum_{k=0}^{(p+1)\lambda_N} b_k z^k$.

On fixe $z \in]1, R[$.

e) En déduire, en utilisant (c), que $\sum_{n=1}^{N} a_n w^{\lambda_n}$ converge quand N tend vers $+\infty$. En déduire une contradiction.

f) Conclure.

6 Singularités isolées et Résidus.

I. Séries de Laurent

Exercice 6.1 Développer en série de Laurent à l'origine $f(z) = \dfrac{1}{z^6(z-1)^2(z+2)}$

a) dans la couronne : $0 < |z| < 1$, b) dans la couronne : $1 < |z| < 2$,
c) à l'extérieur du disque $\bar{D}(0,2)$

Exercice 6.2 Développer en série de Laurent dans les différentes couronnes admissibles de centre indiqué les fonctions suivantes

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z} \quad (a=0), \quad f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^3} \quad (a=1), \quad f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z} \quad (a=0).$$

Exercice 6.3 Soit $u \in \mathbb{C}$. En remarquant que $f(-\frac{1}{z}) = f(z)$, montrer que le développement en série de Laurent pour $0 < |z| < +\infty$ de $f(z) = \exp\left[\frac{u}{2}(z - \frac{1}{z})\right]$ s'écrit $f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left(z^n + \dfrac{(-1)^n}{z^n}\right)$ avec pour $n \geq 0$: $c_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(nt - u\sin t)\, dt$.

Calculer le développement en série entière de la fonction $u \mapsto c_n(u)$ (fonction de Bessel).

On pourra utiliser $c_n(u) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \exp(iu\sin(t)).e^{-int}dt$ puis développer en série entière $\exp(iu\sin(t))$.

II. Singularités

Exercice 6.4 Décrire la nature de la singularité et calculer le résidu correspondant :

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^3}\,; \quad g(z) = \frac{z^2+1}{z^4-1}\,; \quad h(z) = \frac{e^z}{\sin z}\,; \quad \ell(z) = \frac{1}{z^3 \tan z \tanh z} \ (z=0)$$

$$m(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}\,; \quad p(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^3}\,; \quad q(z) = \frac{\sin z}{\cos(z^3)-1} \ (z=0).$$

Exercice 6.5 Déterminer la partie singulière du développement en série de Laurent à l'origine de $f(z) = \dfrac{1}{(e^z-1)^3}$ et l'utiliser pour trouver rés $(f,0)$.

Exercice 6.6 Montrer que $f(z) = \dfrac{z}{\sin(\pi \sin z)}$ a une fausse singularité en 0. Calculer le rayon de convergence de sa série de Taylor en 0.

Exercice 6.7 Soit f une fonction entière dont l'ensemble des zéros est $\mathbb{Z}$. On suppose que tous les zéros sont simples. Montrer qu'il existe g entière telle que $f(z) = e^{g(z)}\sin(\pi z)$.

Indication : considérer la fonction $z \notin \mathbb{Z} \mapsto \dfrac{f(z)}{\sin(\pi z)}$ que l'on peut prolonger en une fonction holomorphe (justifier) et utiliser ses propriétés pour montrer qu'elle s'écrit e^g.

Exercice 6.8 a) Si g est entière et non constante, montrer que $\overline{g(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.

b) Soit f une fonction holomorphe dans $D'(a,r) = D(a,r) \setminus \{a\}$ et pour laquelle a est un point singulier essentiel. Montrer que a est aussi essentiel pour $g \circ f$.

Exercice 6.9 Soit f holomorphe dans $D'(a,r) = D(a,r) \setminus \{a\}$ et vérifiant $\Re f(z) \geq 0$ pour $0 < |z-a| < r$.

a) Montrer que a n'est pas un point singulier essentiel pour f.

b) On suppose que a est un pôle pour f. Montrer que a est une fausse singularité pour $g = \dfrac{1}{1+f}$.

c) En considérant e^{-g}, montrer que g est nulle.

d) Que peut-on en conclure ?

Exercice 6.10 Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$, telle que pour chaque pôle a de f on ait rés $(f,a) \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer qu'il existe une fonction g holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus P$, où P est l'ensemble des pôles de f, telle que $f = g'/g$. *Indication*: chercher g sous la forme $\exp \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$ où γ est un chemin d'origine z_0 et d'extrémité z.

b) Quelle est la nature de la singularité de g en w si w est un pôle multiple de f ?

c) Montrer que si f n'a que des pôles simples, alors g est méromorphe dans $\mathbb{C}$ et décrire ses pôles.

III. Théorème des résidus et applications

Exercice 6.11 Résidu à l'infini. Si f est holomorphe pour $|z| > r$, on pose $g(z) = \dfrac{1}{z^2} f(\dfrac{1}{z})$ pour $0 < |z| < 1/r$. On note rés $(f,\infty) = -$rés $(g,0)$. On dit que c'est le *résidu de f à l'infini.*

a) Soit $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ le développement en série de Laurent de f dans la couronne $|z| > r$. Montrer que rés $(f,\infty) = -c_{-1}$.

b) Si f est méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec un nombre fini de singularités $a_1, \cdots, a_n$, montrer que rés $(f,a_1) + \cdots +$ rés $(f,a_n) +$ rés $(f,\infty) = 0$.

c) Etudier le cas de $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{z(1-z)}$.

Exercice 6.12 Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^4)}\,dx \quad (n = 0,1,2,3,4)\,; \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)\,;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^4}\,dx\,; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+2x+5}\,dx\ .$$

Exercice 6.13 Pour $a > 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{a\cos x} \sin(a \sin x)\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}(e^a - 1)$.

Exercice 6.14 En sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer les *intégrales de Fresnel* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$.

Exercice 6.15 Pour $-1 < \alpha < n-1$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^n}\,dx$.

Exercice 6.16 Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(2+x)(1+x)^3}\,dx$.

Exercice 6.17 Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx$.

Exercice 6.18 Pour $-1 < p < 2$, après avoir donné un sens à $f(z) = \dfrac{z^{1-p}(1-z)^p}{(1+z)^3}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3}\,dx$ en intégrant sur le cycle ci-dessous

7 Zéros de fonctions holomorphes - Bijections holomorphes.

$\mathbb{D}$ désigne le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

Exercice 7.1 Théorème de Rouché. **a)** Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert convexe. Soient $f, g \in H(U)$ n'ayant qu'un nombre fini de zéros $a_1, \cdots, a_m$ et $b_1, \cdots, b_n$ dans U (comptés avec leur ordre de multiplicité).

Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un lacet de classe C^1 par morceaux dans U. On suppose que si z est dans l'image de γ, on a : $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$.

Etablir $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} Ind_\gamma(a_k) = \sum_{k=1}^{n} Ind_\gamma(b_k)$.

b) Soit $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soient $f, g \in H(V)$, $a \in V$ et $r > 0$ tels que $\bar{D}(a,r) \subset V$. On suppose que pour $|z - a| = r$, on a $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$.

Montrer que f et g ont même nombre de zéros dans $D(a,r)$ (comptés avec leur ordre de multiplicité).

Exercice 7.2 Soient C la couronne $2\mathbb{D}\backslash\bar{\mathbb{D}}$ et $Z(P)$ l'ensemble des zéros de $P(X) = X^7 - 5X^3 + 12$.

Déterminer card$(Z(P) \cap \mathbb{D})$ et card$(Z(P) \cap C)$.

Indication : montrer que P n'a que des racines simples. Utiliser $f(z) = -5z^3 - 12$ et $g(z) = z^7$.

Exercice 7.3 Formule d'inversion de Lagrange. Soient $R > 0$ et $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant $\bar{D}(0,R)$, et $f \in H(U)$. On pose $M = \sup\{|f(z)|;\ |z| \leq R\}$ et on suppose que $M > 0$. Soit $V = D(0, \frac{R}{M})$.

a) Soit $z \in V$. Prouver que l'équation en ξ : $\xi = zf(\xi)$ a une unique racine $g(z)$ appartenant à $D(O,R)$.

b) On note $\gamma(t) = Re^{it}$ où $t \in [0, 2\pi]$. Pour $z \in V$, montrer que

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{w(1 - zf'(w))}{w - zf(w)} dw.$$

Indication : théorème des résidus (quel est le seul pôle éventuel de $w \mapsto \dfrac{w(1 - zf'(w))}{w - zf(w)}$?).

c) Soit a_n la valeur en 0 de la dérivée $(n-1)$ ième de $z \to [f(z)]^n$. Montrer que pour $z \in V$, on a :

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Indication : développer en série entière.

Exercice 7.4 Soit $U = (\bar{\mathbb{D}})^c$. Montrer que l'application définie par $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ pour $z \in U$, est injective.

Déterminer l'image de f, sa fonction réciproque g (définie sur Im f) et pour $w \in U$, le développement en série de Laurent de $g(w)$. Indication : on pourra remarquer que $w^2 - 1 = w^2(1 - \frac{1}{w^2})$.

Exercice 7.5 On note $S = \{x \in \mathbb{R} | \ |x| \geq 1\}$; $U = S^c$ et $V = \{z \in \mathbb{C} | \ |Re(z)| \leq \frac{\pi}{2}\}$.

a) Montrer que l'on peut définir $f \in H(U)$ par $f(w) = \frac{1}{i} \log\Big(iw + \sqrt{1-w^2}\Big)$

b) Prouver que f est l'unique élément de $H(U)$ vérifiant
(i) $w = \sin(f(w))$ pour tout $w \in U$ et (ii) $f(x) =$Arcsin(x) pour tout $x \in]-1, 1[$.

c) Etablir $f'(w) = \dfrac{1}{\sqrt{1-w^2}}$ pour tout $w \in U$ et $f(w) = w + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1.3...(2k-1)}{2.4...(2k)} \cdot \frac{w^{2k+1}}{2k+1}$ pour $|w| < 1$.

d) Prouver que $z \mapsto \sin z$ induit une bijection de V sur U dont la bijection réciproque est f.

8 Suites, séries et produits de fonctions méromorphes.

Exercice 8.1 Soient U un ouvert connexe et $f \in H(U)$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que la série de terme général $f^{(n)}(a)$ converge.

Montrer qu'il existe une unique fonction entière F tel que $F_{|U} = f$ puis prouver que la série de terme général $F^{(n)}(z)$ est uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Exercice 8.2 Soient $f, g \in H(\mathbb{D})$ avec $f(0) = g(0) = 0$. On pose $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$.

a) Prouver que les séries $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(z^n)$ et $G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f(z^n)$ sont normalement convergentes sur tout compact de $\mathbb{D}$. Indication : montrer, via le lemme de Schwarz, que l'on a une inégalité du type $|g(z)| \le A_r|z| si |z| \le r$, où r est fixé dans $]0, 1[$.

b) Déterminer le développement en série entière de F à l'origine. En déduire $F = G$.

c) Soit log la détermination principale du logarithme. Etablir pour $z \in \mathbb{D}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + z^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot z^n}{n(1 - z^n)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 + z^n}.$$

Exercice 8.3 Séries de Dirichlet. **a)** Soient $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Pour $z = x + iy$, établir $e^{-az} - e^{-bz} = z \int_a^b e^{-zt} dt$.

En déduire que si $x > 0$, on a $|e^{-az} - e^{-bz}| \le \frac{|z|}{x} |e^{-ax} - e^{-bx}|$.

Dans la suite, $(a_n)_n$ est une suite de nombres complexes et $(\lambda_n)_n$ une suite strictement croissante de nombres réels, de limite $+\infty$.

b) Montrer que si la série $S_z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(-\lambda_n z)$ converge pour $z = 0$, elle converge pour tout complexe z tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$ (Ind. : utiliser une transformation d'Abel). Montrer qu'elle est même holomorphe sur ce domaine.

c) Montrer qu'il existe $R \in \bar{\mathbb{R}}$ vérifiant les conditions :
$\mathrm{Re}(z) > R \Rightarrow S_z$ converge et $\mathrm{Re}(z) < R \Rightarrow S_z$ diverge.

Exercice 8.4 Soient U un ouvert connexe et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes dans U, convergeant uniformément vers f sur tout compact de U.

a) On suppose que $0 \notin f_n(U)$ pour tout n. Montrer que f est identiquement nulle ou que $0 \notin f(U)$. On pourra utiliser le théorème de Rouché avec les fonctions f et f_n.

b) On suppose que f_n est injective pour tout n. Montrer que f est injective ou constante. On pourra introduire $g(z) = f(z) - f(a)$ et $g_n(z) = f_n(z) - f_n(a)$.

c) Soit $q \in \mathbb{N}$. On suppose que l'équation $f(z) = 0$ a au moins $q + 1$ racines (comptés avec leur ordre de multiplicité) et que pour tout n, l'équation $f_n(z) = 0$ a au plus q racines (comptés avec leur ordre de multiplicité). Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 8.5 Montrer que la série de fonctions méromorphes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$. Indication : considérer $g_n(z) = \frac{(-1)^n}{z-n} + \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 8.6 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note γ_n le lacet dont l'image est le bord orienté du carré

$$\{x + iy \in \mathbb{C} |\ \sup(|x|, |y|) \leq n + \frac{1}{2}\}.$$

a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $2|y| \geq 1$. Etablir $\left|\text{cotan}(\pi(x + iy))\right| \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}$.

b) Soient $y \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ avec $2|y| \leq 1$. Etablir $\left|\text{cotan}(\pi(k + \frac{1}{2} + iy))\right| \leq th\frac{\pi}{2}$.

c) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $n \in \mathbb{N}$, $z \in \text{Im}\gamma_n \Rightarrow |\text{cotan}(\pi z)| \leq M$.

d) Soient $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ tels que $2|z| < 2n + 1$. Etablir

$$\pi\text{cotan}(\pi z) - \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_n} \frac{\pi\text{cotan}(\pi u)}{u-z} du = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_n} \frac{z\pi\text{cotan}(\pi u)}{u(u-z)} du.$$

e) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a $\pi\text{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2}$. En déduire $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

f) Calculer $I_n = \int_{\gamma_n} \frac{\pi\text{cotan}(\pi z)}{z^2} dz$.

Dans la suite f est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant un nombre fini de pôles $a_1, \cdots, a_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. On suppose qu'il existe $A, R > 0$ et $\alpha > 1$ vérifiant $|z| > R \Rightarrow |f(z)| \leq A|z|^{-\alpha}$.
On pose $L(z) = \pi f(z)\text{cotan}(\pi z)$

g) Montrer que pour n assez grand, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_n} L(z)dz = \sum_{k=-n}^{n} f(k) + \sum_{j=1}^{p} res(L, a_j). \qquad \text{En déduire} \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = -\sum_{j=1}^{p} res(L, a_j).$$

h) Calculer pour $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, $S(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2}$.

i) Montrer que pour $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$, $\pi \tan(\pi z) = 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k - \frac{1}{2})^2 - z^2}$.

Exercice 8.7 **a)** Montrer que les produits infinis suivants convergent normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z(1-z)}{n(n+1)}\right).$$

b) En utilisant l'exercice précédent, établir pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \pi z(1-z) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z(1-z)}{n(n+1)}\right).$$

On remarquera que la série $\sum \frac{f_n'}{f_n}$ converge normalement sur tout compact où de $\mathbb{C}$, avec $f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2}$ et $f_0(z) = z$.

Exercice 8.8 Prouver que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}$.

Exercice 8.9 Soit $t \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}(t) > 0$. On pose $q = e^{i\pi t}$.

a) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. Prouver qu'une fonction entière admettant a et b pour périodes est constante (on pourra d'abord montrer qu'elle est bornée).

b) Montrer que le produit infini $h(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^{2n-1}e^{2iz}\right)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

c) On pose $f(z) = h(z)h(-z)$. Quels sont les zéros de f ? Calculer $f(z + \pi t)$ en fonction de $f(z)$.

d) Montrer que la fonction g où $g(z) = e^{-iz}\frac{f(z)}{f(z + \frac{\pi t}{2})}$, est méromophe sur $\mathbb{C}$, de périodes 2π et πt. La fonction g est-elle constante ?

Exercice 8.10 On note log la détermination principale du logarithme. On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a $\pi\mathrm{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2 - k^2}$.

a) Pour $z \in \mathbb{D}$, on pose $g(z) = z + \frac{z^2}{2} + \log(1-z)$. Montrer que $|g(z)| \leq |z|^3$ pour $|z| \leq \frac{1}{2}$. Indication : comme d'habitude, on considèrera $t \mapsto g(tz)$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n(z) = \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n.\exp\left(z + \frac{z^2}{2n}\right)$.

Montrer que le produit infini $h(z) = \prod_{n=1}^{\infty} h_n(z)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

c) Soit $f(z) = e^z\frac{h(z)}{h(-z)}$. Prouver que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^*$, on a $\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi z\mathrm{cotan}(\pi z)$.

d) On désigne par γ et χ des chemins de classe C^1 vérifiant $(\mathrm{Im}\gamma \cup \mathrm{Im}\chi) \cap \mathbb{Z}^* = \emptyset$, et joignant 0 à z. Montrer que

$$F(z) := \exp\Big[\int_\gamma \pi w\mathrm{cotan}(\pi w)dw\Big] = \exp\Big[\int_\chi \pi w\mathrm{cotan}(\pi w)dw\Big].$$

Prouver que $F(z) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^*$.

e) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^*$: $f(-z) = \frac{1}{f(z)}$ et $f(z).f(1-z) = c\sin(\pi z)$ où c est une constante.

f) On note $V = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$. Pour $z \in V$, on pose $\gamma_z(t) = tz$, avec $t \in [0,1]$ et $\psi(z) = \int_{\gamma_z}\log(1-u)\frac{du}{u}$.

Montrer que $\psi \in H(V)$. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $1 - e^{-2i\pi z} \in V$, montrer que

$$F(z) = \exp\Big[\frac{i\pi z^2}{2} - \frac{1}{2i\pi}\psi(1 - e^{-2i\pi z})\Big].$$

Exercice 8.11 Produits de Blaschke. Soit $(\alpha_n)_n$ une suite dans $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ telle que $\sum(1 - |\alpha_n|) < +\infty$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \cdot \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \qquad \text{où} \quad z \in \mathbb{D}.$$

a) Montrer que B est holomorphe sur $\mathbb{D}$.

b) Montrer que B est bornée sur $\mathbb{D}$ et ne possède d'autres zéros que les α_n et éventuellement l'origine.

9 Fonctions classiques-Produits eulériens

Exercice 9.1 Fonction Gamma d'Euler. On rappelle que la fonction Γ est définie pour $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$.

a) Calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour $x > 0$.

b) En admettant la formule de Stirling : $\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}$ au $V(+\infty)$, montrer que pour tout $x > 0$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n!(n+1)^x}.$$

Indication : trouver un équivalent de $\dfrac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(n+1)}$.

c) Montrer que le membre de droite du (b) définit une fonction entière, ce qui permet de prolonger Γ analytiquement (on note encore Γ ce prolongement). Pour cela ,on écrira

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1+x/k)e^{-x\ln(1+1/k)}.$$

d) En notant c la constante d'Euler, montrer

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{cz} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1+\frac{z}{n}\Big)e^{-\frac{z}{n}}$$

avec convergence uniforme sur tout compact.

e) Déterminer les zéros et les pôles de Γ.

Exercice 9.2 Fonction ζ de Riemann. Soit $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$.

a) Montrer que ζ existe et est holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$.

b) Calculer $\lim_{s\to 1} |\zeta(s)|$ et $\lim_{s\to1}(s-1)\zeta(s)$. Indication : comparer $1/n^s$ et $\int_n^{n+1} t^{-s}dt$.
Indication : remarquer que $\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1} = \sum_{n\geq 1} \int_n^{n+1} n^{-s} - t^{-s}dt$.

c) Montrer que pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a l'écriture sous forme de produit eulérien

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

d) Pour $\sigma, t \in \mathbb{R}$ avec $\sigma > 1$, calculer $\log|\zeta(\sigma+it)|$ sous forme d'une série. En déduire que ζ ne s'annule pas dans le demi-plan ouvert $\mathrm{Re}(s) > 1$, en minorant explicitement $|\zeta(\sigma+it)|$.

On introduit la fonction $\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2 t}$, définie pour $t > 0$ et on admet l'équation fonctionnelle $\theta(\frac{\pi}{t}) = \sqrt{t}\theta(\pi t)$. Remarquer que $n^{-s}\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-nt}dt$ (on l'appliquera avec n^2 et $s/2$ puis on coupera l'intégrale en π)) et montrer que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, admettant un unique pôle, simple, en 1.

e) On pose $\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$. Montrer l'équation fonctionnelle $\xi(s) = \xi(1-s)$.

f) En déduire pour $\sigma, t \in \mathbb{R}$ avec $\sigma > 1$:

$$|\zeta(\sigma)|^3|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq 1.$$

g) En déduire que la fonction ζ n'a pas de zéros dans le demi-plan fermé $\mathrm{Re}(s) \geq 1$.

h) Où sont les zéros complexes de ζ ?

10 Représentations conformes.

$\mathbb{D}$ désigne le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

Exercice 10.1 Soit $U = \mathbb{C}\setminus]-\infty, \frac{-1}{4}]$. Prouver que $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ est une représentation conforme de $\mathbb{D}$ sur U.

Exercice 10.2 Ensemble de Julia rempli. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme de degré $d > 1$. L'ensemble des z tels que la suite $(f^n(z))_n$ ne tend pas vers l'infini est noté K_f.

a) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que si $|z| > R$, alors $f^n(z) \to \infty$. Montrer que K_f est l'intersection des $(f^n)^{-1}(\bar{D}(0,R))$.

b) En déduire que K_f est compact. Montrer que $f(K_f) = K_f = f^{-1}(K_f)$.

c) Montrer que le complémentaire de K_f est connexe.

On suppose désormais que $f(z) = z^2 + c$ avec $c \in \mathbb{C}$.

d) Soit $V_n = (f^n)^{-1}(D(0,R))$. Montrer que $V_{n+1} \subset \bar{V}_n$ et que $K_f = \bigcap_n V_n$.

e) On suppose que $0 \in K_f$. Montrer que K_f est connexe.

f) On suppose $0 \notin K_f$. Montrer qu'il existe m minimal tel que $0 \in V_m \setminus V_{m+1}$ puis montrer que pour tout k, V_{m+k} possède 2^k composantes connexes. En déduire que K_f a une infinité de composantes connexes.

Exercice 10.3 Théorème de Bieberbach. Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$.

a) Soit $f \in H(\Omega)$ avec $f(z) = z + \sum_0^\infty a_n z^{-n}$. On suppose que f est injective. Montrer que l'aire de $\mathbb{C} \setminus f(\Omega)$ est $\pi\Big(1 - \sum_0^\infty n|a_n|^2\Big)$.

b) Soit $h \in H(\mathbb{D})$, injective et impaire, avec $h(z) = c_1 z + c_3 z^3 + \cdots$. Montrer que $|c_3| \leq |c_1|$. (Ind. : considérer $[h(z^{-1})]^{-1}$)

c) Soit $f \in H(\mathbb{D})$ avec $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$. On suppose que f est injective. Montrer qu'il existe $h \in H(\mathbb{D})$, injective et impaire telle que $h(z)^2 = f(z^2) - f(0)$.

Montrer que $|a_2| \leq 2|a_1|$ et que l'on a égalité ssi f est de la forme

$$f(z) = \frac{\lambda z}{(1 - e^{ia} z)^2} \qquad a \in \mathbb{R}.$$