Master 1 de Mathématiques

Université d'Artois

Exercices d'Analyse Fonctionnelle

P. Lefèvre

1 Révisions de topologie.

Exercice 1.1 Cours : a) Soient $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes sur $C([0,1])$.

b) Montrer que $(C([0,1]), \|.\|_1)$ n'est pas complet (Ind. : considérer par exemple une suite de fonctions qui vaut -1 sur $[0, 1/2 - 1/n]$ et 1 sur $[1/2 + 1/n, 1]$)

Montrer que $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$ est complet.

c) Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|')$ deux e.v.n. Montrer que pour tout $T \in \mathcal{B}(E,F)$,

$$|||T||| = \inf\{C|\ \forall x \in E,\ \|T(x)\|' \le C\|x\|\}.$$

Exercice 1.2 Inégalités de Hölder et Minkowski.

Soit $p > 0$. On rappelle que $\ell^p = \{(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ \sum |a_n|^p < +\infty\}$ et $\|(a_n)\|_p = (\sum |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ est alors défini sur ℓ^p.

Pour $p = +\infty$: $\ell^\infty = \{(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ \sup_n |a_n| < +\infty\}$ et $\|(a_n)\|_\infty = \sup_n |a_n|$ est alors défini sur ℓ^∞. Enfin, $c_0 = \{(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ \lim_n a_n = 0\}$.

Soient $p, q \ge 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

a)i) Montrer l'inégalité de Young : pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$, $xy \le \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$.

ii) En déduire l'inégalité de Hölder : pour tout $a \in \ell^p$ et tout $b \in \ell^q$, montrer que $ab \in \ell^1$ avec

$$\|(a_n.b_n)\|_1 \le \|(a_n)\|_p.\|(b_n)\|_q.$$

b) En déduire l'inégalité de Minskowski, c'est à dire l'inégalité triangulaire pour la norme $\|.\|_p$ (Indication : on pourra par exemple utiliser l'inégalité de Hölder après avoir remarquer que $|a_n + b_n|^p \le |a_n|.|a_n + b_n|^{p-1} + |b_n|.|a_n + b_n|^{p-1}$) et montrer que $\|.\|_p$ est effectivement une norme.

c) Montrer que l'espace ℓ^p muni de la norme $\|.\|_p$ est un espace de Banach. Même question pour $(c_0, \|.\|_\infty)$.

Exercice 1.3 a) Montrer que dans un espace vectoriel normé, l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée associée et que l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte associée.

b) Le résultat est-il encore vrai dans un espace métrique ?

Exercice 1.4 1) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. F un sous-espace de E. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} N\ :\ E/F & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \dot{x} & \longmapsto & \inf_{y\in\dot{x}} \|y\| \end{array}$$

i) Montrer que N est une semi-norme sur E/F. Décrire les $x \in E$ tels que $N(\dot{x}) = 0$.

ii) A quelle condition sur F, $(E/F, N)$ est un espace vectoriel normé ? Sous cette condition, montrer que la surjection canonique est continue, puis que si E est un espace de Banach, alors E/F aussi (on rappelle qu'un espace est Banach ssi toute série normalement convergente est convergente).

2) Soit f une application linéaire de rang fini sur E. Montrer que f est continue si et seulement si Ker$f$ est fermé.

Exercice 1.5 On considère $C_c(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact. Montrer que les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas comparables sur cet espace.

Exercice 1.6 Montrer que l'application suivante est continue (on calculera la norme; montrer qu'elle n'est pas atteinte)

$$\begin{array}{rcl} \varphi \ : \ c_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{2^{n+1}} \end{array}$$

Exercice 1.7 Soit K une partie non vide de $\mathbb{R}^n$, convexe, compacte, symétrique par rapport à 0 telle que 0 soit un point intérieur. On veut montrer qu'il existe une norme p sur $\mathbb{R}^n$ telle que K soit la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour p.

On introduit la jauge de Lorentz-Minkowski : $p(x) = \inf\{t > 0 | \ \frac{x}{t} \in K\}$. Montrer que p est une norme qui répond au problème. Pour cela,

i) Montrer que $p(x) = 0$ ssi $x = 0$.

ii) Pour x non nul, montrer que $p(x)^{-1}x \in K$.

iii) Pour x non nul et $t > 0$, montrer que $p(tx) \geq tp(x)$. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $p(tx) = |t|p(x)$.

iv) Montrer que si x et y sont non nuls, $\frac{x+y}{p(x)+p(y)} \in K$.

v) Conclure.

Exercice 1.8 On veut montrer que ℓ^∞ est non-séparable. On suppose qu'il existe une partie dénombrable dense $(v_n)_{n\geq 1}$. Soit x une suite à valeurs 0 ou 1. On note $\omega_x = \overset{\circ}{B}(x, \frac{1}{2})$.

1) Montrer que $x \neq x' \Rightarrow \omega_x \cap \omega_{x'} = \emptyset$.

2) Montrer que pour tout $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, il existe un entier $n(x)$ tel que $v_{n(x)} \in \omega_x$. Justifier que pour $x \neq x'$, on a $n(x) \neq n(x')$.

3) En déduire que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ devrait alors être dénombrable et conclure (on pourra faire un raisonnement via la diagonale de Cantor).

Exercice 1.9 Montrer qu'il existe une suite de L^1 convergente vers 0 mais qui ne converge pas presque partout vers la fonction nulle. Indication : on pourra considérer des fonctions caractéristiques de sous-intervalles dyadiques de $[0,1]$: les intervalles $I_{j,n} = \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]$ où $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j < 2^n$.

2 Espaces de Hilbert.

Exercice 2.1 a) Montrer que dans tout espace de Hilbert H, on a l'identité du parallélogramme généralisée

$$\forall n \geq 1,\ \forall x_1, \cdots, x_n \in H,\ 2^{-n} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq n}} \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

b) En déduire que ℓ^p n'est pas isomorphe à ℓ^2 si $p \neq 2$. Pour cela, on considèrera un isomorphisme (bicontinu !) u entre ℓ^p et ℓ^2 et on analysera son action sur la base canonique : $e_j = (\delta_{n,j})_{n \geq 1}$.

Exercice 2.2 Soient H un espace de Hilbert et F un sous-espace fermé de H non réduit à $\{0\}$. Soit P une projection de H sur F; montrer qu'on a l'équivalence entre

a) P est la projection orthogonale sur F.

b) $\|P\| = 1$.

c) $\forall x \in H,\ |\langle P(x), x\rangle| \leq \|x\|^2$.

(Indication : pour montrer $(c) \Rightarrow (a)$, on pourra introduire le vecteur $y + \varepsilon e^{-i\theta} z$ où $y \in F$, $z \in F^\perp$, $\varepsilon > 0$ et $e^{i\theta}$ est le signe complexe de $\langle P(z), y\rangle$.)

Exercice 2.3 a) Soit $K \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Montrer que l'opérateur $T_K : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, qui à $f \in L^2(\mathbb{R})$ associe $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y) dy$ est bien défini et borné.

b) Déterminer T_K^*.

Exercice 2.4 (*DS 99*)

1) Soient H un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $(.|.)$, et T un endomorphisme continu de H. On note T^* l'adjoint de T. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $T^* \circ T = Id$

b) $\forall\ x, y \in H,\ (T(x)|T(y)) = (x|y)$.

c) T est une isométrie

2) Soit S (le shift) l'endomorphisme de ℓ^2 défini par $S(a) = (0, a_0, a_1, a_2, \cdots)$ où $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) Montrer que S est une isométrie.

b) Calculer S^*.

3) Si T est une isométrie, a-t-on $T \circ T^* = Id$?

Exercice 2.5 Décomposition de Halmos-Wold. (*DS 98*) Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe), U une isométrie (i.e. un endomorphisme de H qui conserve la norme).

1) Montrer que $U(K)$ est un sous-espace fermé de H, pour tout fermé K de H.

On définit $M = \displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} U^k(H)$ et N le supplémentaire orthogonal de $U(H)$ dans H.

2) Montrer que M est un sous-espace de Hilbert de H tel que $U(M) = M$.

3) Montrer que les espaces $U^k(N)$, $k \in \mathbb{N}$, sont deux à deux orthogonaux.

En notant $S = \displaystyle\overset{\perp}{\bigoplus_{k \in \mathbb{N}}} U^k(N)$, montrer H est la somme directe orthogonale de S et M : $H = S \overset{\perp}{\bigoplus} M$.

Exercice 2.6 Théorème de Lax-Milgram, approximation de Galerkin. soit H un espace de Hilbert réel. On considère une forme bilinéaire a sur H, que l'on suppose continue et coercive (i.e. $\exists C > 0$, $\exists \alpha > 0$ tq $\forall x, y \in H$, $|a(x,y)| \leq C\|x\|.\|y\|$ et $\forall x \in H$, $a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2$).

1)a) Démontrer qu'il existe un opérateur continu T sur H tel que $\forall x, y \in H$, $a(x,y) = \langle T(x), y\rangle$

b) Montrer que $T(H)$ est dense dans H.

c) Montrer que pour tout x dans H, $\|T(x)\| \geq \alpha\|x\|$. En déduire que T est injectif et que $T(H)$ est fermé.

d) En déduire que T est un isomorphisme bicontinu (T et T^{-1} continus) de H sur lui-même.

2) Soit L une forme linéaire continue sur H.

a) Déduire des questions précédentes qu'il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall y \in H$, $a(u,y) = L(y)$.

b) On suppose dans cette question que a est symétrique et on définit $\Phi(x) = \dfrac{1}{2}a(x,x) - L(x)$.

Démontrer que le point u est caractérisé par la condition $\Phi(u) = \min\limits_{x\in H} \Phi(x)$.

3) On reprend les notations de 2)a). Soit $(E_n)_n$ une suite croissante de sous-espaces vectoriels fermés de H dont la réunion est dense dans H.

a) Démontrer que pour tout entier n, il existe un unique $u_n \in E_n$ tel que $\forall y \in E_n$, $a(u_n, y) = L(y)$.

Vérifier en particulier que si E_n est de dimension finie d_n alors la détermination de u_n se ramène à la résolution d'un systéme linéaire de la forme $A_n U_n = Y_n$, où A_n est une matrice inversible d'ordre d_n (qui est symétrique définie positive si a est symétrique).

b) Démontrer que pour tout entier n, $\|u - u_n\| \leq \dfrac{C}{\alpha} d(u, E_n)$.

En déduire que $(u_n)_n$ converge vers u.

Exercice 2.7 Polynômes d'Hermite. On considère l'espace de Hilbert $H = L^2(\mu)$ où μ est la mesure positive définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}),\ \mu(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2} dx \ \textit{i.e.}\ d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

a) Démontrer que pour tout entier n, il existe un polynôme unique $\tilde{P}_n$ de degré n tel que

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right) = (-1)^n e^{-x^2/2} \tilde{P}_n.$$

b) On note pour chaque n, $P_n = \dfrac{1}{\sqrt{n!}} \tilde{P}_n$.

Démontrer que $(P_n)_n$ est une famille orthonormale de H.

c) Soit $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, démontrer qu'il existe une suite de polynômes $(p_n)_n$ telle que, uniformément sur $\mathbb{R}$, on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n(x) e^{-x^2/8} = f(x) e^{-x^2/8}$.

(Indication : on utilisera le résultat de l'exercice 3 de la section approximation pour montrer que l'adhérence de $e^{-x^2}.\mathbb{R}[X]$ est une algèbre puis on utilisera le théorème de Stone-Weierstrass.)

En déduire que $(p_n)_n$ converge vers f dans H.

d) Démontrer que $(P_n)_n$ est une base hilbertienne de H.

Exercice 2.8 Opérateurs de Hilbert-Schmidt. Soit H un Hilbert séparable de dimension infinie. On considère $T \in \mathcal{B}(H)$ et deux bases hilbertiennes de H : $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1) Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|T(e_n)\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|T^*(f_n)\|^2 \leq \infty$ et en déduire que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|T(e_n)\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|T(f_n)\|^2$$

On définit $HS(H) = \{T \in \mathcal{B}(H);\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \|T(e_n)\|^2 < \infty\}$, et pour tout $T \in HS(H)$:

$$\|T\|_2 = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|T(e_n)\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

2) Montrer que $HS(H)$ est un sous-espace vectoriel strict de $\mathcal{B}(H)$; que $\|.\|_2$ est une norme sur $HS(H)$ et que $|||T||| \leq \|T\|_2$ pour tout $T \in HS(H)$.

Exercice 2.9 Un théorème ergodique. Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(H)$ avec $\|T\| \leq 1$.

1) Démontrer que si $x \in H$, alors $Tx = x$ si et seulement si $\langle T(x), x\rangle = \|x\|^2$ (utiliser le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz). En déduire que Ker$(I-T)$ =Ker$(I-T^*)$.

2) Démontrer que pour tout opérateur S sur H, on a Im$(S)^\perp$ =Ker(S^*). En déduire que H =Ker$(I-T) \oplus_\perp \overline{\mathrm{Im}(I-T)}$.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \dfrac{1}{n+1}\Big(I + T + \ldots + T^n\Big)$. Montrer que pour tout $x \in H$, $\lim_{n\to+\infty} T_n(x) = P(x)$ où P est la projection orthogonale sur Ker$(I-T)$. Indication : on considèrera successivement les cas $x \in$Ker$(I-T)$, $x \in$Im$(I-T)$ et $x \in \overline{\mathrm{Im}(I-T)}$.

Exercice 2.10 Lemme de Kirszbraun. On considère un espace de Hilbert H de dimension finie et un entier $n \geq 2$. Soient $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ deux familles de vecteurs de H; et $(r_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de réels positifs ou nuls. On suppose que

$$\forall i,j \in \{1,\cdots,n\},\ \|b_i - b_j\| \leq \|a_i - a_j\|, \quad \text{et} \quad \bigcap_{1\leq i\leq n} \bar{B}(a_i, r_i) \neq \emptyset.$$

On veut montrer que $\bigcap_{1\leq i\leq n} \bar{B}(b_i, r_i) \neq \emptyset$.

Pour cela, on fixe p dans $\bigcap_{1\leq i\leq n} \bar{B}(a_i, r_i) \neq \emptyset$ et on peut supposer que p n'est pas l'un des a_i (pourquoi ?), ce que l'on fait.

Pour $x \in H$, on pose $\Lambda(x) = \max_{1\leq i\leq n} \dfrac{\|x - b_i\|}{\|p - a_i\|}$. On suppose que $\forall x \in H$, $\Lambda(x) > 1$.

1) Justifier qu'il existe $q \in H$ tel que $\forall x \in H$, $\Lambda(x) \geq \lambda$, où $\lambda = \Lambda(q)$.

2) On suppose que $\|q - b_i\| = \lambda\|p - a_i\|$ pour $1 \leq i \leq k$ et $\|q - b_i\| < \lambda\|p - a_i\|$ pour $i > k$; pourquoi ? Montrer que $q \in Conv\{b_1, \cdots, b_k\}$.

(Indication : soit π la projection sur le convexe fermé $Conv\{b_1, \cdots, b_k\}$, on supposera que $q \neq \pi(q)$ puis on introduira pour $t > 0$ le vecteur $q_t = q + t(\pi(q) - q)$.)

3) Conclure. (Indication : on introduira $e_i = q - b_i$ et $d_i = p - a_i$ puis on montrera que $\langle e_i, e_j\rangle > \langle d_i, d_j\rangle$.)

3 Approximation.

Exercice 3.1 Soit K un compact métrique. Montrer que $(C(K), \|.\|_\infty)$ est séparable

Indication : choisir une partie dénombrable dense $(x_n)_{n\geq 1}$ dans K puis utiliser l'algèbre engendrée par les fonctions $f_0(t) = 1$ et $f_n(t) = d(t, x_n)$ pour $n \geq 1$.

Exercice 3.2 (*Ds 99*) Soit $(K_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de compacts métriques. On considère $K = K_1 \times \ldots \times K_n$ muni de la topologie produit; et pour u_1 (resp. $\cdots, u_n$) continues sur K_1 (resp. $\cdots, K_n$) à valeurs réelles, la fonction

$$(x_1, \cdots, x_n) \in K \longmapsto u_1(x_1) \cdots u_n(x_n) \in \mathbb{R}.$$

Montrer que l'ensemble des fonctions ainsi obtenues engendre un sous-espace (noté classiquement $C(K_1) \otimes \cdots \otimes C(K_n)$) dense dans $(C(K), \|.\|_\infty)$. (remarque : encore vrai pour un produit infini).

Montrer que c'est une partie stricte de $C(K)$ dès que $n \geq 2$. Indication : le faire pour $n = 2$ en considérant $(x, y) \mapsto \exp(xy)$.

Exercice 3.3 Approximation de Laguerre. $C_0(\mathbb{R}^+)$ est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles qui converge vers 0 en l'infini. On rappelle la version suivante du théorème de Stone-Weierstrass : toute sous-algèbre séparante de $C_0(\mathbb{R}^+)$ est dense.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $e_n(x) = \exp(-nx)$.

a) Pour tout entier n, on note $f_n = e_2 - e_1 p_n$ où $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!}$. Montrer que $(f_n)_n$ converge vers 0 uniformément sur $\mathbb{R}^+$ (Indication : on pourra utiliser la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}$).

On note V le sous-espace $\{e_1.p;\ p \in \mathbb{R}[X]\} \subset C_0(\mathbb{R}^+)$. On veut montrer que V est dense dans $(C_0(\mathbb{R}^+), \|.\|_\infty)$.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $e_n \in \bar{V}$ (pour cela, on raisonnera par récurrence et on appliquera l'hypothèse de récurrence à e_2 en $(n+1)x/2$ puis à e_n en $x/2$).

c) Conclure. Indication : on pourra introduire l'espace vectoriel engendré par les e_n, où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

d) Montrer que pour $p \geq 1$, V est dense dans $L^p(\mathbb{R}^+)$.

Exercice 3.4 Méthode de Korovkin. Soit $e_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$. Soient $f \in C([0,1])$ et $\varepsilon > 0$.

1)a) En utilisant l'uniforme continuité de f, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1], \qquad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{(x-y)^2}{\delta^2}.$$

On considère une suite (T_n) d'endomorphismes de $C([0,1])$ vérifiant :

(i) $\forall f \geq 0$, $T_n(f) \geq 0$ et (ii) $T_n(e_i) \to e_i$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$.

b) Montrer que T_n est croissant puis, avec 1.a., que pour tout $f \in C([0,1])$ et tous $x, y \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} |T_n(f)(x) - f(y)T_n(e_0)(x)| &\leq T_n(|f - f(y)e_0|)(x) \\ &\leq \varepsilon T_n(e_0)(x) + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\Big(T_n(e_2)(x) - 2yT_n(e_1)(x) + y^2 T_n(e_0)(x)\Big). \end{aligned}$$

c) En déduire que pour tout $f \in C([0,1])$, $(T_n(f))_n$ converge vers f dans $C([0,1])$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme de Bernstein $B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, f(\frac{k}{n}) X^k (1-X)^{n-k}$.

Montrer que les polynômes de Bernstein (associés à f) convergent uniformément vers f sur $[0,1]$.

3) Adapter les résultats du 1) (et les preuves) dans le cas de fonctions périodiques de période 1 avec $e_1 = \cos$ et $e_2 = \sin$. On donnera alors une nouvelle démonstration du théorème de Fejer $K_n * f \to f$ où K_n est la moyenne de Césaro des fonctions $D_k(x) = \sum_{|j| \leq k} \exp(2i\pi jx)$.

Indication : on montrera que $f \mapsto K_n * f$ est un opérateur positif (i.e. vérifie (i)). Puis on établira une inégalité du type 1.a. : $\forall x, y \in [0,1], \qquad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{1 - \cos(\delta)}[1 - \cos(x-y)]$.

4 Fourier sur le tore.

Exercice 4.1 soient $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et $f(t) = \exp(2i\pi at)$ pour $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, prolongée par 1-périodicité.
Calculer les coefficients de Fourier de f puis montrer que

$$\pi\text{cotan}(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2}.$$

En faisant un D.L. en $a = 0$ à l'ordre 3 de $\text{cotan}(\pi a) - \dfrac{1}{\pi a}$, en déduire les sommes

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Dans tous les exercices suivants, les fonctions continues sont 1-périodiques.

Exercice 4.2 On rappelle que pour un entier N fixé, le noyau de Dirichlet d'ordre N est $D_N = \sum_{j=-N}^{N} e_j$, où $e_j(t) = \exp(2i\pi jt)$. Le noyay de Féjèr d'ordre N est $F_N = \dfrac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} D_n$.
a) Donner une expression simplifiée de D_N et F_N.
b) Montrer que pour $f \in L^1$, $F_N * f$ converge vers f dans L^1.
c) Montrer que l'application de L^1 dans c_0 qui à f associe ses coefficients de Fourier, est injective.

Exercice 4.3 Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et de classe C^1 par morceaux.
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $2i\pi n\hat{f}(n) = \hat{f'}(n)$.
b) En déduire que f est somme de sa série de Fourier et que celle-ci converge normalement.

Exercice 4.4 **Théorème de Bernstein.** Soit f une fonction Höldérienne d'ordre $\alpha > 0$ i.e.

$$\sup\Big\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha};\ x \neq y\Big\} < \infty.$$

a) En notant $f_x(t) = f(x + t)$ où $x, t \in \mathbb{R}$, calculer $\widehat{f_x}(n)$ en fonction de $\hat{f}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
b) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$C2^{-2j\alpha} \geq \sum_{2^j+1 \leq |n| \leq 2^{j+1}} |\hat{f}(n)|^2.$$

(Indication : on s'intéressera à $\|f - f_x\|_2$ avec x bien choisi et on utilisera la propriété Höldérienne de f)
c) Montrer que la suite des coefficients de Fourier de f est dans $\ell^p(\mathbb{Z})$ pour $p > \dfrac{2}{2\alpha + 1}$.
(Indication : on appliquera l'inégalité de Hölder)

Exercice 4.5 Inégalité isopérimétrique. Soit Γ un arc de Jordan dans $\mathbb{C}$ de classe C^1 par morceaux (continue fermée sans point double) et de longueur L enfermant une surface d'aire S.

Alors on veut montrer que $L^2 \geq 4\pi S$ et que l'on a égalité dans le cas d'un cercle.

On peut supposer $L = 1$ (pourquoi ?) et on paramètre Γ par l'abscisse curviligne s (donc $\Gamma = \{(x(s), y(s)) | \; s \in [0,1]\}$). On peut aussi supposer $\hat{x}(0) = 0$ (pourquoi ?).

a) Exprimer S et $L(= 1)$ en fonction de d'intégrales simples de la variable s (on pourra utiliser la formule de Green-Riemann pour exprimer S).

b) Etablir l'inégalité d'Hurwitz : soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ à valeurs complexes. Alors

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx - \Big|\int_0^1 f(x)dx\Big|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

On étudiera le cas d'égalité.

c) Conclure (Indication : on minorera $L^2 - 4\pi S$ par 0 en étudiant le cas d'égalité).

Exercice 4.6 Equation de la chaleur (cas d'une barre finie). On considère une fonction h C^1 sur $]0, 1[$. On cherche à trouver u, définie sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^+$ et C^∞ sur $[0, 1]\times]0, +\infty[$, telle que

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \text{ pour } t \geq 0 \qquad u(x, 0) = h(x) \text{ pour } x \in]0, 1[$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ dans }]0, 1[\times]0, +\infty[.$$

a) Montrer que les solutions à variables séparées : $u(x, t) = f(x)g(t)$ de l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ dans $]0, 1[\times]0, +\infty[$ avec $u(0, t) = u(1, t) = 0$ pour $t > 0$ sont de la forme $u_n(x, t) = a_n \sin(n\pi x)e^{-n^2\pi^2 t}$ où $n \geq 1$. Indication : les fonctions f et g sont chacune solutions d'une équation différentielle.

b) Résoudre le problème de la chaleur. Indication: on "prolongera" d'une part h en une fonction impaire 2-périodique sur $\mathbb{R}$. D'autre part, on utilise la méthode de superposition, i.e. on somme la famille de solutions obtenues au a.

c) Pour $x \in]0, 1[$, montrer que $\lim_{t\to 0^+} u(x, t) = h(x)$ et que $\lim_{t\to+\infty} u(x, t) = 0$.

5 Convolution et Fourier sur $\mathbb{R}$

Exercice 5.1 Calculer le carré pour la convolution de la fonction indicatrice de $[0,1]$.

Exercice 5.2 Inégalité d'Young. Soient $p,q \in [1,\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq 1$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, montrer que f et g sont convolables et que $f * g \in L^r(\mathbb{R})$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$ et que

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Indication : on commencera par écrire que $|f| = |f|^{p/r} \cdot |f|^{1-p/r}$ et $|g| = |g|^{q/r} \cdot |g|^{1-q/r}$. On utilisera l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués r et r', puis avec $p\dfrac{r-1}{r-p}$ et $q\dfrac{r-1}{r-q}$.

Exercice 5.3 Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

On suppose que f admet un représentant uniformément continu. Montrer que $a \mapsto f_a \in L^\infty(\mathbb{R})$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On veut montrer que la réciproque est vraie : on suppose que $a \mapsto f_a$ est continue en 0. On veut montrer que f admet un représentant uniformément continu. On considère une approximation de l'unité à support compact: par exemple, avec φ une fonction triangle continue telle que $\varphi(0)=1$ et $\varphi(t)=0$ pour $|t| \geq 1$, on introduit $\varphi_n(t) = n\varphi(nt)$.

i) Montrer que pour presque tout x, on a pour presque tout t, $|f(x-t)-f(x)| \leq \|f_t - f\|_\infty$.

ii) Montrer que $\widetilde{f_n} = \varphi_n * f$ converge vers f dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

iii) Montrer que pour tout n, $\widetilde{f_n}$ est uniformément continue.

iv) Montrer que $(\widetilde{f_n})_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction uniformément continue

v) Conclure.

Exercice 5.4 En considérant $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |n| 1_{[n,n+\frac{1}{n^3}[}$, montrer qu'il existe des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ telles que $f * f(x)$ n'existe pas nécessairement pour tout réel x.

Exercice 5.5 **1)** Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que f et $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout réel t, $\mathcal{F}(f')(t) = 2i\pi t \mathcal{F}f(t)$.

2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $g \in L^1(\mathbb{R})$ où $g(x) = xf(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{F}f$ est dérivable et que $(\mathcal{F}f)' = -2i\pi\mathcal{F}g$.

Exercice 5.6 Equation de la chaleur pour une barre illimitée.

On considère $h \in L^1(\mathbb{R})$. On cherche à trouver u telle que

$$\forall t \geq 0,\ u(.,t); \frac{\partial u}{\partial x}(.,t); \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(.,t) \in L^1(\mathbb{R}) \ \text{ et } \ u(x,0) = h(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

$$\forall T > 0,\ \exists f \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall t \in [0,T],\ |\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)| \leq f(x) \qquad dx - p.p.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ \text{ dans } \mathbb{R}\times]0,+\infty[.$$

Indication : pour cela, on appliquera la transformée de Fourier à l'équation de la chaleur et on rappelle le résultat du cours que $e^{-\pi x^2}$ est la transformée d'elle-même.

Montrer que $u(x,t)$ tend vers $h(x)$ quand t tend vers $0+$. Pour cela, on montrera que h est bornée car h et h' sont dans L^1 puis on utilisera le th. de convergence dominée.

Exercice 5.7 Diviseurs de zéro.

Montrer que l'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ admet des diviseurs de zéro. Pour cela, on prendra des fonctions dont les transformées de Fourier sont à supports disjoints.

Exercice 5.8 Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$, une suite $(\alpha_n)_n$ admettant un point d'accumulation dans $\mathbb{R}$ et des réels $a < b$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \int_a^b f(x) e^{i\alpha_n x} dx = 0.$$

Montrer que $f = 0$ p.p. sur $[a, b]$.

Indication : introduire $F(z) = \displaystyle\int_a^b f(x) e^{izx} dx$ et utiliser le cours d'analyse complexe.

Exercice 5.9 *DS99.* (4 points)

Soit $\lambda > 0$.

1) Calculer la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

2) En déduire pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\sin(2\pi\lambda y)}{2\pi\lambda y} e^{2\pi i x y} \, dy \ .$$

Problème. DS99 (7 points)

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $\tau_\alpha f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par :

$$(\tau_\alpha f)(x) = f(x - \alpha) \, , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Le but du problème est de montrer que si E est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathbb{R})$ tel que :

$$f \in E \quad \Rightarrow \quad \tau_\alpha f \in E \, , \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

alors il existe un borélien $B \subseteq \mathbb{R}$ tel que :

$$E = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \, ; \ (\mathcal{F}f)(y) = 0 \ \ \forall y \in B \} \, .$$

On note, pour $\alpha \in \mathbb{R}$: $e_\alpha(x) = e^{2\pi i \alpha x}$, $x \in \mathbb{R}$.

On note aussi $F = \mathcal{F}E = \{\mathcal{F}f \, ; \ f \in E\}$, et P la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ sur F.

1) Vérifier que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}(\tau_\alpha f) = (\mathcal{F}f) e_{-\alpha}$, et montrer que cela reste vrai pour $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Quelle propriété en déduit-on pour F ?

2) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$u, v \in L^2(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad (u - Pu) \perp (Pv) e_\alpha \ .$$

3) Que signifie cette orthogonalité pour la transformée de Fourier de la fonction (qui est intégrable) $w = (u - Pu)\overline{Pv}$? En déduire que $w = 0$.

4) Montrer, en utilisant 3), que pour $u, v \in L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$u(Pv) = (Pu)v \quad p.p.$$

5) On note $v_0(y) = e^{-|y|}$, $y \in \mathbb{R}$, et on pose :

$$\phi(y) = \frac{(Pv_0)(y)}{v_0(y)} \, .$$

En utilisant 4), montrer que $\phi(y) = 0$ ou 1 pour presque tout $y \in \mathbb{R}$ (utiliser le fait que $P^2 = P$).

6) Conclure.

6 Convolution et Fourier sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{T}$

Exercice 6.1 Formule sommatoire de Poisson. Soit $f \in C(\mathbb{R})$ telle que

$$\exists M > 0,\ \exists \alpha > 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M(1+|x|)^{-\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}f(n)| < \infty.$$

Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}f(n) < \infty$.

(Indication : introduire la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$, montrer qu'elle est 1-périodique et la développer en série de Fourier)

Exercice 6.2 Soit $q = e^{-\varepsilon} \in]0,1[$, $\theta \in \mathbb{R}$, on définit $S(q,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} e^{2i\pi n\theta}$.

1) Montrer que $S(q,\theta) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp[-\frac{\pi^2}{\varepsilon}(n-\theta)^2]$; en déduire que $S(q,\theta) > 0$.

(Indication : exo 1 avec $f_x(t) = f(x+t)$ où $f(\theta) = e^{-\pi^2\theta^2/\varepsilon}$)

2) Montrer que $F(q) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} > \frac{1}{2}$ et que $\lim_{q\to 1^-} F(q) = \frac{1}{2}$.

Indication : prendre $\theta = \frac{1}{2}$.

Exercice 6.3 Soit $N \in \mathbb{N}$, calculer $\|F_N\|_{L^1([0,1])}$ (pour cela on explicitera l'expression de F_N) et les coefficients de Fourier de F_N où F_N est le noyau de Fejer :

$$F_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} e_k.$$

1) Montrer que $F_N * f$ converge vers f dans $L^1([0,1])$ si $f \in L^1([0,1])$ et que $F_N * f$ converge vers f dans $C([0,1])$ si $f \in C([0,1])$. Montrer que $L^1([0,1]) \to \ell^\infty : f \mapsto \hat{f}$ est injective.

2) En déduire que pour toute fonction continue sur $[0,1]$, 1-périodique, si les coefficients de Fourier de f sont positifs alors leur somme est convergente.

Exercice 6.4 Soit $E = \{f \geq 0 |\ f$ continue et $f = 0$ hors de $[-1,1]$, $f(0) = 1$, $\hat{f} \geq 0$ sur $\mathbb{R}\}$.

1) Soit $f_0(t) = \max(1-|t|, 0)$, montrer que $f_0 \in E$.

2) Montrer $\max_{f\in E} \int_{-1}^{1} f(t)dt = 1 = \int_{-1}^{1} f_0(t)dt$.

(Indication : introduire la fonction g coïncidant avec f sur $[-1,1]$ et 2-périodique puis utiliser les exercices 1 et 3)

Exercice 6.5 On veut déterminer les caractères continus de $\mathbb{R}$, c'est à dire les morphismes de groupes continus de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{T},.)$. On fixe un caractère continu γ.

1) Montrer qu'il existe $c \neq 0$ et $\delta > 0$ tel que $\int_0^\delta \gamma(t)dt = c$.

2) En déduire que pour tout réel x, $c\gamma(x) = \int_x^{x+\delta} \gamma(t)dt$ et que γ est dérivable.

3) Montrer qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma(x) = e^{-iyx}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

7 Baire, Banach and co.

Exercice 7.1 Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.

Exercice 7.2 Montrer qu'un ouvert (non vide) d'un espace de Baire X est un espace de Baire. Pour cela, on procèdera de la façon suivante : on fixe une suite (ω_n) d'ouverts denses de Ω, ouvert de X. On considèrera Ω' qui est le complémentaire de l'adhérence de Ω (i.e. son extérieur) et $\omega'_n = \Omega' \cup \omega_n$. On remarquera que c'est une suite d'ouverts denses de X. Conclure.

Exercice 7.3 Montrer qu'un espace de Banach n'admet pas de base (algébrique) dénombrable. (Indication : par l'absurde : on utilisera Baire avec $F_n = vect\{e_1, \cdots, e_n\}$)

Exercice 7.4 **Théorème de Corominas - version faible.** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entière, telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(z) = 0.$$

On pose $F_n = \{z \in \mathbb{C} \mid f^{(n)}(z) = 0\}$

1) Montrer que F_n est fermé et en déduire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que F_p est d'intérieur non vide.

2) En conclure que f est un polynôme.

Exercice 7.5 **Théorème de la limite simple de Baire.** Soient X un espace métrique complet et Y un espace métrique (on notera d la métrique). On suppose qu'une suite $(f_n)_n$ de fonctions continues de X dans Y converge simplement vers f. On veut montrer que l'ensemble $C(f)$ des points de continuité de f est dense dans X.

On introduit la fonction $\omega(x) = \inf_{r>0} \sup\{d(f(u), f(v))\|;\ u, v \in \overset{\circ}{B}(x, r)\}$ et l'ensemble $O_\varepsilon = \omega^{-1}([0, \varepsilon[)$.

1) Montrer que $x \in C(f) \Leftrightarrow \omega(x) = 0$ et que $\forall \varepsilon > 0$, O_ε est un ouvert de X.
En déduire $C(f) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} O_{\frac{1}{p}}$.

2) On fixe $\varepsilon, R > 0$ et un $x_0 \in X$. On note B_R la boule ouvrte de centre x_0 de rayon R.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \{x \in B_R |\ \forall m \geq n,\ d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon\}$ est fermé dans B_R.

b) Montrer que $B_R = \cup_{n \geq 1} F_n$ et en déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide (Indication : on utilisera Baire).

c) En déduire qu'il existe $x_1 \in B_R$ et $r > 0$ tel que $\bar{B}(x_1, r) \subset B_R$ et tel que :

$$\forall x \in \bar{B}(x_1, r),\ d(f(x), f_{n_0}(x)) \leq \varepsilon.$$

d) En utilisant la continuité de f_{n_0} en x_1, montrer qu'il existe $s > 0$ tel que :
$\forall x \in \bar{B}(x_1, s)$, $d(f(x), f(x_1)) < 3\varepsilon$ puis que $\omega(x_1) < 7\varepsilon$. En déduire que $O_{7\varepsilon} \cap B_R \neq \emptyset$.

3) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0$, O_ε est dense dans X.

4) Conclure.

Exercice 7.6 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que pour toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable, f' est continue sur un ensemble dense de I. (Indication : exo 4 et considérer une suite de taux d'accroissement adequat).

Exercice 7.7 (Grothendieck) Soit X un sous-espace fermé de $L^2([0,1])$ dont chaque élément est aussi dans $L^\infty([0,1])$.

1) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall f \in X$, $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$.

2) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille orthonormale dans X : $f_1, \cdots, f_n$. Pour $x \in \mathbb{C}^n$, on note $F_x = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j$.

a) On choisit une partie dénombrable dense D de $\mathbb{C}^n$, montrer qu'il existe $N \subset [0,1]$ de mesure nulle telle que : $\forall x \in D$, $\forall t \notin N$, $|F_x(t)| \leq C\|x\|_2$.

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\forall t \notin N$, $|F_x(t)| \leq C\|x\|_2$.

3) En choisissant $x = (\overline{f_1(t)}, \cdots, \overline{f_n(t)})$, montrer que : $\forall t \notin N$, $\sum_{j=1}^{n} |f_j(t)|^2 \leq C^2$. En déduire que X est de dimension finie.

Exercice 7.8 Montrer la version suivante du théorème de Banach-Steinhaus : pour toute famille d'opérateurs $(T_i)_{i\in I} \in B(E,F)$ où E est un Banach et F est normé, on a l'alternative suivante :

il existe $M > 0$ tel que $\forall i \in I$, $|||T_i||| \leq M$

ou

il existe une partie dense de E (qui est une intersection dénombrable d'ouverts denses) dont tout élément x vérifie

$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| = +\infty$.

Exercice 7.9 On note C l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $f(0) = f(1)$. Pour tout $f \in C$ et tout entier n, on note $S_n(f)$ la n^{ieme} somme partielle de Fourier : $\sum_{|k|\leq n} \hat{f}(k) e_k$, où $e_k(t) = \exp(2i\pi kt)$.

1) Montrer que $S_n(f) = D_n * f$ où D_n est le noyau de Dirichlet : $\sum_{|k|\leq n} e_k$.

On fixe $x \in [0,1]$ et on considère la famille d'applications $\sigma_n^x : C \to \mathbb{C}$, définie par $\sigma_n^x(f) = S_n(f)(x)$.

2) Montrer que $|||\sigma_n^x||| = \|D_n\|_1$ pour tout n. Pour cela, on remarquera que D_n est de signe constant par morceaux puis on introduira une suite de fonctions continues qui approxime la fonction étagée “signe de D_n”. Pour simplifier, on pourra raisonner d'abord dans le cas $x = 0$.

3) En déduire que $|||\sigma_n^x||| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

4) En déduire qu'il existe une fonction de C dont la série de Fourier diverge au point x (Indication : Banach-Steinhaus).

5) Déduire qu'il existe une intersection dénombrable d'ouverts denses de C dont toute fonction admet une série de Fourier divergente en x. En déduire qu'il existe un ensemble dense de fonctions de C dont la série de Fourier diverge sur un ensemble dense de $[0,1]$.

Exercice 7.10 (*Exam 2000*) Soit $\mathcal{C}([0,1])$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,1]$, muni de la norme uniforme, et soit X un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}([0,1])$ dont tous les éléments sont continûment dérivables.

On définit $T: X \to \mathcal{C}([0,1])$ par $T(f) = f'$.

1) Montrer que le graphe de T est fermé.

2) En déduire qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\|f'\|_\infty \leq N$ pour toute $f \in X$ telle que $\|f\|_\infty \leq 1$.
3) On pose $x_n = n/N$ pour $0 \leq n \leq N$, et on définit $S\colon X \to \mathbb{R}^{N+1}$ par

$$S(f) = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_N)).$$

a) On suppose que $\|f\|_\infty = 1$ et $S(f) = 0$. Montrer, en utilisant le Théorème des accroissements finis, que l'on aboutit à une contradiction.

b) En déduire que X est de dimension finie et $\dim X \leq N + 1$.

Exercice 7.11 Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles, muni de la norme infinie. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$A_n = \{f \in E |\, \forall t \in [0, 1],\, \exists s \in [0, 1],\, |f(t) - f(s)| > n|t - s|\}.$$

1) Montrer que pour tout n, l'intérieur de A_n est dense dans E. Pour cela, procéder comme suit : on fixe $f \in E$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in [0, 1]$ avec $|x - y| \leq \eta$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/3$ (justifier !). On choisit un entier $m \geq \max(\eta^{-1}, 3n\varepsilon^{-1})$ et on pose $x_k = \dfrac{k}{m}$ pour $k \in \{0, \ldots, m\}$. On définit alors la fonction g affine par morceaux sur $[x_k, (x_k + x_{k+1})/2]$ et $[(x_k + x_{k+1})/2, x_{k+1}]$ telle que $g(x_k) = f(x_k)$ et $g((x_k + x_{k+1})/2) = f((x_k + x_{k+1})/2) + 2\varepsilon/3$ pour tout k.

a) Montrer que $g \in A_{2n}$.

b) Montrer que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

c) Montrer que la boule ouverte de centre g et de rayon $\rho = \dfrac{n}{8m}$ est incluse dans A_n.

2) En déduire que l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$, dérivables en aucun point, est dense dans E.

8 Dualite, Hahn-Banach

Exercice 8.1 Montrer que le dual de ℓ^p est isométrique à $\ell^{p'}$ pour $p \in [1, +\infty[$ et que le dual de ℓ^∞ contient isométriquement strictement ℓ^1.

Pour cela on montrera que l'application θ qui associe à $(c_n) \in \ell^{p'}$, la forme linéaire sur ℓ^p continue : $(a_n) \mapsto \sum c_n a_n$ est une isométrie. Dans le premier cas, on montrera que θ est surjective mais pas dans le second cas.

Exercice 8.2 Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale d'un espace de Hilbert H.

On note $A = \{e_n + ne_m | \, m \geq n\}$.

1) Montrer que $0 \in \bar{A}^w$.

2) Montrer qu'aucune suite de A converge faiblement vers 0.

Exercice 8.3 Soient X et Y deux espaces de Banach (dont les boules unités ouvertes sont notées B_X et B_Y) et T un opérateur de X dans Y. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes (de plus δ peut-être le même dans a, b et c).

a) Il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $y^* \in Y^*$, $\|T^*(y^*)\| \geq \delta \|y^*\|$.

b) Il existe $\delta > 0$ tel que $\delta B_Y \subset \overline{T(B_X)}$.

c) Il existe $\delta > 0$ tel que $\delta B_Y \subset T(B_X)$.

d) T est surjectif.

Indications : pour $a \Rightarrow b$: soit $y \notin \overline{T(B_X)}$, justifier par le th. de séparation que $\|y\| \geq \delta$. Pour $b \Rightarrow c$: on raisonne avec $\delta = 1$ (justifier) et on fixe $y_1 \in B_Y$ ainsi qu'une suite $\varepsilon_n > 0$ vérifiant $\sum \varepsilon_n < 1 - \|y_1\|$. Construire deux suites x_n et y_n telles que $\|x_n\| \leq \|y_n\|$, $\|y_n - T(x_n)\| < \varepsilon_n$ et $y_{n+1} = y_n - T(x_n)$. Conclure avec $x = \sum x_n$.

Exercice 8.4 Soient $p, r \geq 1$ et T un opérateur de $L^p([0,1])$ dans $L^r([0,1])$. Montrer qu'il existe une fonction K de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, $K(x,.)$ définisse un élément de $L^{p'}([0,1])$ $(p^{-1} + p'^{-1} = 1)$ et pour tout $f \in L^p([0,1])$ et tout $x \in [0,1]$, on ait

$$\int_0^x T(f)(y)dy = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

Exercice 8.5 Soit K un compact métrique. $C(K)$ est l'espace les fonctions continues sur K à valeurs réelles. On note δ_x où $x \in K$ la mesure de Dirac en x, qui peut aussi être vue comme l'élément de $C(K)'$ défini par $f \mapsto f(x)$.

1) Montrer que pour tout $x \in K$, $\pm\delta_x$ est un point extrémal de la boule unité de $C(K)^*$. (Indication : $\delta_x = \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$ avec $\delta_x \neq \varphi_1$, on prouvera qu'il existe un compact K_0 qui ne contient pas x tel que $|\varphi_1|(K_0) > 0$ puis on introduira une fonction f continue sur K telle que $f_{|K_0} = 0$ et $f(x) = 1$)

2) On veut montrer la réciproque. Soit donc $m \in C(K)^*$ de norme 1 telle que $m \neq \pm\delta_x$ pour tout x. Soit μ une mesure borélienne sur K représentant m. Montrer qu'il existe une partie borélienne A de K telle que $|\mu|(A) \in]0,1[$ (on raisonnera par l'absurde en utilisant le caractère précompact de K). Puis conclure.

Exercice 8.6 E un espace vectoriel normé.

1) On suppose que E^* est séparable. Soit $\{f_n\}_n$ une suite dense, de $E^* \setminus \{0\}$ (justifier !).

a) Montrer qu'il existe $x_n \in E$ de norme 1 telle que $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|f_n\|$.

b) On note F la fermeture de l'espace vectoriel engendré par les x_n que l'on suppose distinct de E. Montrer qu'il existe $f \in E^*$ non nulle telle que $f_{|F} = 0$.

c) Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $\|f - f_{\varphi(n)}\|$ converge vers 0, puis que $f_{\varphi(n)}$ converge vers 0. En déduire que E est séparable.

2) Montrer que si E est séparable et réflexif alors E^* est séparable. En déduire que ℓ^1 n'est pas réflexif.

Pour une mesure complexe μ sur $[0,1]$, on définit la transformée de Fourier-Stieljes : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{\mu}(n) = \displaystyle\int_0^1 e_n(-t)d\mu(t)$ avec $e_n(t) = \exp(2i\pi nt)$.

Exercice 8.7 Produit de Riesz. Montrer que pour toute suite $(a_n)_n$ bornée par 1 dans ℓ^∞, il existe une mesure complexe μ sur $[0,1]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\hat{\mu}(3^n) = a_n$. Pour cela, on introduira le produit de Riesz :

$$\mu_N = \prod_{k=0}^{N} \Big(1 + \frac{a_k.e_{3^k} + \bar{a}_k.e_{-3^k}}{2}\Big).$$

Indications : 1) On calculera $\hat{\mu}_N(p)$ (en développant μ_N) pour tout entier p en faisant attention à montrer que l'écriture d'un entier sous la forme $\sum \varepsilon_j 3^j$ (avec $\varepsilon_j \in \{-1,0,1\}$) est unique.

2) En déduire $\|\mu_N\|_{M([0,1])} = \|\mu_N\|_1 = 1$. Conclure par compacité pour la topologie préfaible.

3) En déduire que pour toute fonction f continue 1-périodique telle que $\hat{f}(n) = 0$ pour $n \neq 3^k$, on a $\sum |\hat{f}(n)|$ convergente.

Exercice 8.8 Théorème de Rajchman. Soit une mesure complexe μ sur $[0,1]$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{\mu}(n) = 0$ et que $|\mu|(\{0,1\}) = 0$.

Préliminaire : montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques $\mathcal{P}$ est dense dans $L^1(|\mu|)$. Pour cela, on suppose le contraire. Justifier qu'alors il existe $h_0 \in L^\infty(|\mu|)$ non nul tel que pour tout $P \in \mathcal{P}$, on ait $\int_{[0,1]} Ph_0 d|\mu| = 0$. En déduire que $\int_{[0,1]} fh_0 d|\mu| = 0$ pour toute $f \in C([0,1])$ et conclure.

1) Montrer que pour tout $f \in L^1(|\mu|)$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 e_n(-t)f(t)d\mu(t) = 0$.

(Indication : raisonner d'abord avec des polynômes trigonométriques)

2) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \widehat{|\mu|}(n) = 0$.

(Indication : on utilisera la décomposition polaire d'une mesure)

3) Conclure que $\lim\limits_{n\to-\infty} \hat{\mu}(n) = 0$.

Exercice 8.9 On suppose que $\dim E = \infty$. On veut montrer que $\overline{S_E}^w = \bar{B}_E$ (la boule unité de E fermée en norme).

a) Montrer que pour tout $x_0 \in E$ avec $\|x_0\| < 1$, on a pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E^*$, il existe $x \in E$ de norme 1 tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, $|\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon$. (Indication, justifier que $\displaystyle\bigcap_{1\leq i\leq n} \operatorname{Ker}\varphi_i \neq \{0\}$)

b) Conclure.

Exercice 8.10 Soit T un opérateur de X dans Y (des Banach). Montrer que le noyau de T^* est préfaiblement fermé.

Exercice 8.11 **ℓ^1 a la propriété de Schur.** Soit $(x^{(n)})_n$ une suite de ℓ^1 faiblement convergente vers 0. On veut montrer que $(x^{(n)})_n$ converge fortement.

1) Montrer que pour tout entier p, $\lim_{n\to+\infty} x_p^{(n)} = 0$.

2) Soit $B = \bar{B}_{\ell^\infty}(0,1)$, que l'on munit de la topologie de la convergence simple, métrisable avec

$$\forall x, y \in B, \qquad d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{1 + 2^i |x_i - y_i|}.$$

a) Montrer que (B, d) est compact.

Soient $\varepsilon > 0$ et $F_n = \{b \in B |\ \forall k \geq n,\ |\sum_{\mathbb{N}} b_i x_i^{(k)}| \leq \varepsilon\}$, pour tout entier n.

b) Montrer qu'il existe n_0 tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide.

c) Montrer que F_{n_0} est convexe et symétrique par rapport à 0 donc qu'il existe N_0 tel que pour tout $b \in B$ vérifiant $b_n = 0$ pour $n \leq N_0$, on a $b \in F_{n_0}$.

3) Conclure.

Exercice 8.12 Montrer que le dual de $L^{\frac{1}{2}}([0,1])$ est réduit à $\{0\}$. Pour cela, on montrera que tout f est dans l'enveloppe convexe de la boule (métrique) de centre 0 et de rayon ε, pour tout $\varepsilon > 0$: soit $a = d(f, 0)$ où $d(f,g) = \int_0^1 \sqrt{|f(t) - g(t)|} dt$. Montrer que $f \in conv(B(0, \frac{a}{\sqrt{2}}))$.

Exercice 8.13 **Lemme de Helly.** Soient E un Banach et $f_1, \cdots, f_n \in E^*$; $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall \beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R},\ \Big|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i\Big| \leq \Big\|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\Big\| \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in B_E,\ \forall i \in \{1, \cdots, n\},\ |f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon.$$

Pour cela, pour $\Rightarrow$, considérer l'application $\varphi(x) = (f_i(x))_{1\leq i\leq n}$ où $x \in E$. Il s'agit de montrer que α appartient au convexe fermé $\overline{\varphi(B_E)}$. Pour la réciproque, majorer $|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x_\varepsilon) - \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i|$.

Exercice 8.14 Soit m une mesure positive σ-finie. Soit (f_n) une suite de $L^1(m)$ telle $|f_n| \leq g \in L^1(m)$. On suppose que (f_n) est une suite de Cauchy pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$, c'est à dire que pour tout $h \in L^\infty$, $\int f_n h dm$ converge vers une limite $L(h)$.

1) Montrer que $\nu(A) = L(\mathbb{1}_A)$ définit une mesure absolument continue par rapport à m.

2) En déduire que (f_n) est convergente pour la topologie faible de $L^1(m)$, ie qu'il existe $f \in L^1(m)$ tel que, pour tout $h \in L^\infty$, $\int f_n h dm$ converge vers $\int f h dm$.

Exercice 8.15 Soit $\varphi |\ E^* \to \mathbb{R}$ linéaire. Montrer que Kerφ est préfaiblement fermé ssi φ est préfaiblement continue.

Exercice 8.16 **Théorème de Müntz-Szasz.** Soit $(n_j)_{j\geq 1}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs. On note p_n la fonction $p_n(t) = t^n$ sur $[0,1]$ et X la fermeture dans $C_{\mathbb{C}}([0,1])$ de l'espace vectoriel engendré par les fonctions $p_0, p_{n_1}, \cdots, p_{n_j}, \cdots$.

On se propose de montrer que d'une part (1) si $\sum_{j\geq 1} \frac{1}{n_j} = \infty$, alors $X = C_{\mathbb{C}}([0,1])$ et d'autre part que (2) si $\sum_{j\geq 1} \frac{1}{n_j} < \infty$, alors pour tout $n \notin (n_j)_{j\geq 1}$, non nul, la fonction $p_n \notin X$.

1) On se place sous les hypothèses de (1). **a)** On suppose qu'il existe μ une mesure de Borel complexe telle que $\int_0^1 p_{n_j}(t)d\mu(t) = 0$ pour tout $j \geq 1$. Soit $f(z) = \int_0^1 t^z d\mu(t)$.

i) Expliquer pourquoi on peut choisir μ portée par $]0,1]$. Montrer que f est holomorphe et bornée sur le demi-plan ouvert complexe de droite.

ii) En considérant $g(z) = f\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$. Déterminer les zéros de g.

iii) On rappelle la formule de Jensen : soient $0 < r < 1$ et h holomorphe sur le disque unité ouvert et bornée avec $h(0) \neq 0$; alors en notant $z_1, \cdots, z_{n(r)}$ les zéros de h dans le disque fermé de centre 0 et de rayon r, on a

$$|h(0)| \prod_{j=1}^{n(r)} \frac{r}{|z_j|} = \exp\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|(h(re^{iv})|dv\Big).$$

Montrer que si g est non identiquement nulle alors $\sum_j (1 - |\alpha_j|)$ converge où les α_j sont les zéros de g.

iv) Montrer que $\int_0^1 p_k(t)d\mu(t) = 0$ pour tout entier $k \geq 1$.

b) Conclure en utilisant Hahn-Banach.

2)a) Montrer qu'il suffit de construire une mesure μ sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 t^z d\mu(t)$ soit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > -1$ qui soit nulle sur 0 et les n_j mais sans autre zéro.

Soit

$$f(z) = \frac{z}{(2+z)^3} \prod_{j\geq 1}^{\infty} \frac{n_j - z}{2 + n_j + z}.$$

b) i) Montrer que le produit converge sur tout compact ne contenant pas les points $-n_j - 2$ et que f est méromorphe.

ii) Montrer que $|f(z)| \leq 1$ si $\mathrm{Re}(z) \geq -1$ et que la restriction de f à $\mathrm{Re}(z) = -1$ est dans L^1.

iii) Soit z tel $\mathrm{Re}(z) > -1$. En utilisant la formule de Cauchy sur le chemin d'intégration suivant le demi-cercle de centre -1 et de rayon $R > 1 + |z|$ de $-1 - iR$ à $-1 + iR$ en passant par $-1 + R$, complété par un segment rectiligne; montrer que pour $\mathrm{Re}(z) > -1$

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(-1+is)}{-1+is-z} ds.$$

iv) En déduire que

$$f(z) = \int_0^1 t^z \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-1+is)e^{-is\log(t)} ds dt.$$

v) En posant $g(s) = f(-1+is)$, montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(-1+is)e^{-is\log(t)}ds$ est continue et bornée sur $]0,1]$. En posant $d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\hat{g}(\frac{1}{2\pi}\log(t))dt$, conclure.

9 Opérateurs

Exercice 9.1 **Rappel.** Démontrer le théorème d'Ascoli : soit K métrique compact et $\mathcal{H}$ une partie de $C(K)$. On suppose que $\mathcal{H}$ est bornée ponctuellement ($\forall x \in K$, $\sup_{\mathcal{H}} |h(x)| < \infty$) et équicontinue ($\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in K$, $\exists \alpha_x > 0$, $d(x,t) < \alpha_x \Rightarrow \forall h \in \mathcal{H}$, $|h(x) - h(t)| < \varepsilon$).

On veut montrer que $\mathcal{H}$ est relativement compacte i.e. $\overline{\mathcal{H}}$ compacte.

1) Justifier qu'il existe $x_1, \ldots, x_n$ tels que $K = \bigcup_{1 \le i \le n} \overset{\circ}{B}(x_i, \alpha_{x_i})$.

2) Soit D le disque fermé (du plan complexe) de centre 0 et de rayon M, où M est la borne supérieure des $|h(x_i)|$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $h \in \mathcal{H}$. En utilisant l'application $p(h) = (h(x_1), \ldots, h(x_n))$ de $\mathcal{H}$ dans $D \times \ldots \times D$ (avec la norme sup), montrer qu'il existe $h_1, \cdots, h_m \in \mathcal{H}$ tels que pour tout $h \in \mathcal{H}$, il existe $j \in \{1, \cdots, m\}$ tel que $\sup_{1 \le i \le n} |h_j(x_i) - h(x_i)| < \varepsilon$.

3) Montrer que $\mathcal{H} \subset \bigcup_{1 \le j \le m} \overset{\circ}{B}(h_j, 3\varepsilon)$ puis conclure (on rappelle qu'un espace précompact et complet est compact).

Exercice 9.2 Soit $K \in L^2([0,1]^2)$. Montrer que l'opérateur $T_K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ suivant est compact, en approximant K par des polynômes puis T_K par des opérateurs de rang fini :

$$T_K(f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy.$$

Exercice 9.3 Montrer que tout opérateur compact à valeurs dans un Hilbert est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini. (Indication : utiliser la définition de compacité d'un tel opérateur, on obtient des vecteurs x_i où $i \in I$, I fini puis utiliser l'existence de projections de norme 1 sur les sous-espaces de dimension finie, ici $F = \mathrm{vect}\{x_i,\ i \in I\}$).

Exercice 9.4 Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$, où E et F sont des Banach. Montrer que $\|T\| = \|T^*\|$.

Exercice 9.5 Utiliser le théorème d'Ascoli pour montrer que l'opérateur T_K défini formellement dans l'exercice 2 est compact de $C([0,1])$ dans $C([0,1])$ si $K \in C([0,1]^2)$.

Retrouver le résultat en argumentant comme dans l'exercice 2.

Exercice 9.6 **1)** Montrer que si $T : E \to F$ est un opérateur compact, alors

$$\forall (x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}, \qquad x_n \xrightarrow{w} 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} T(x_n) = 0.$$

Indication : on remarquera que $\varphi \circ T \in E^*$ pour tout $\varphi \in F^*$. On montrera que toute valeur d'adhérence de $T(x_n)$ est nulle. Montrer qu'il existe des opérateurs ayant cette propriété mais qui ne sont pas compacts.

2) Soit $A = (\frac{1}{i+j})_{i,j \ge 1}$ (la matrice de Hilbert).

a) Montrer que A définit un opérateur continu de $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$. (Indication : on introduira la fonction $f(t) = i\pi(1-2t)$, où $t \in [0,1[$, 1-périodique, dont on calculera les coefficients de Fourier. On comparera alors le coefficient de Fourier d'ordre $i+j$ de f au coefficient (i,j) de A. Puis on estimera $\langle b, Ax \rangle$, où $b, x \in \ell^2$, en mettant ceci sous la forme d'un produit scalaire dans L^2 d'une fonction de L^2 avec le produit poncutel de f et d'une fonction de L^2).

b) En utilisant le 1., montrer que cet opérateur n'est pas compact. (Indication : considérer le vecteur $\frac{1}{\sqrt{n}}(1, \cdots, 1, 0, \cdots)$)

Exercice 9.7 Shift. Soit $S : L^2([0,1],\mathbb{C}) \to L^2([0,1],\mathbb{C})$, défini par $S(f)(t) = tf(t)$.

1) Montrer que S est borné et n'admet aucune valeur propre.

2) On veut montrer que $[0,1] \subset \sigma(S)$. Soit $\lambda \in [0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[\lambda, \lambda+\varepsilon] \subset [0,1]$ ou $[\lambda-\varepsilon, \lambda] \subset [0,1]$. Supposons que $[\lambda, \lambda+\varepsilon] \subset [0,1]$ pour fixer les idées, alors on définit $f_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} 1_{[\lambda,\lambda+\varepsilon]}$.

a) Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\lambda I - S)(f_\varepsilon) = 0$.

b) Conclure.

3) Déterminer $\sigma(S)$.

Exercice 9.8 Soit $T : X \to Y$ un opérateur. Montrer que $j_Y \circ T = T^{**} \circ j_X$.

Exercice 9.9 Théorème de Schauder. On veut montrer qu'un opérateur T de E dans F (espaces de Banach) est compact si et seulement si T^* est compact.

1) On suppose T compact donc $K = \overline{T(B_E)}$ est compact. Il s'agit de montrer qu'étant donnée $(v_n) \subset B_{F^*}$, il existe une sous-suite de $T^*(v_n)$ convergente (justifier).

a) Soit $\mathcal{H} = \{v_{n_{|K}}\}_n$. Montrer que $\mathcal{H}$ est bornée et équicontinue. Conclure qu'il existe $(v_{n_k})_k$ telle que $(v_{n_{k|K}})_k$ soit Cauchy dans $C(K)$.

b) Montrer que $T^*(v_{n_k})$ est convergente. Conclure.

2) Pour la réciproque, utiliser le 1) puis raisonner avec T^{**}, en utilisant 9.8.

Exercice 9.10 Soit $T \in B(H)$, où H est un Hilbert complexe. On veut montrer que LASSE

1) $\forall x \in H$, $\langle T(x), x\rangle \geq 0$.

2) $T = T^*$ et $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$.

On dit alors que T est positif.

a) Pour $1 \Rightarrow 2$, on note $\Delta = T - T^*$.

i) Montrer que pour tout $x \in H$, on a $\langle \Delta(x), x\rangle = 0$. En déduire que pour tous $x, y \in H$, on a $\langle \Delta(x), y\rangle$ est réel puis que Δ est nul.

ii) On fixe $\lambda < 0$ et on note $S = -\lambda I + T$. Montrer que S est injectif et qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in H$: $\delta\|x\| \leq \|S(x)\|$. En déduire que S est d'image fermée et surjectif. Conclure.

b) Pour $2 \Rightarrow 1$, on note $m = \inf\{\langle Tx, x\rangle; \|x\| = 1\}$.

i) Justifier qu'il suffit de montrer que $m \in \sigma(T)$.

ii) On considère $\varphi(x,y) = \langle Tx - mx, y\rangle$ et on suppose que $T - mI$ est inversible. Montrer que pour tout $x \in H$, $\|T(x) - mx\| \leq C\sqrt{\varphi(x,x)}$ pour une certaine constante C (on pourra justifier que φ est positive). Conclure.

Exercice 9.11 Théorème Spectral.

1) Soit T un opérateur autoadjoint sur un espace de Hilbert H de dimension supérieure à 1 (le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

a) Montrer que $m = \inf\{\langle Tx, x\rangle; \|x\| = 1\} \in \sigma(T)$ et $M = \sup\{\langle Tx, x\rangle; \|x\| = 1\} \in \sigma(T)$ et que de plus $\sigma(T) \subset [m, M]$ (en particulier, le spectre est non vide).

Indication : on pourra suivre le cheminement suivant :

i) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $d(\lambda)$ la distance de λ à $[m, M]$. Montrer que pour tout $x \in H$,

$$d(\lambda)\|x\| \leq \|\lambda x - T(x)\|.$$

ii) En supposant que $\lambda \notin [m, M]$, montrer que $\lambda I - T$ est injectif et d'image fermée, puis surjectif (cf Chap.II;2.9.2.). Conclure que $\sigma(T) \subset [m, M]$.

iii) Utiliser les techniques de l'exercice précédent.

b) En déduire que si $\sigma(T) = \{0\}$ alors $T = 0$.

2) Soit T un opérateur autoadjoint compact sur un espace de Hilbert séparable H. Soient $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ les valeurs propres non nulles de T. On note $\lambda_0 = 0$. Soient E_n les sous-espaces propres correspondants.

a) Que sait-on de la dimension des E_n pour $n \geq 1$?

b) Montrer que les sous-espaces propres sont orthogonaux.

On pose $F = vect\{E_n; n \geq 0\}$. On veut montrer que F est dense dans H.

c) Montrer que $T(F^\perp) \subset F^\perp$.

On note τ l'endomorphisme induit sur le Hilbert $F^\perp$.

d) Montrer que τ est un opérateur autoadjoint compact sur $F^\perp$.

e) Que vaut $\sigma(\tau)$? Que vaut τ ? Conclure.

Montrer qu'il existe une base hilbertienne de vecteurs propres de T.

Exercice 9.12 T est un opérateur hermitien compact sur H. Soient $y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation en x : $\quad Tx - \lambda x = y \qquad (*)$

Utiliser le théorème spectral et décomposer x suivant les sous-espaces propres. Différencier les cas $\lambda = 0$, $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \notin \sigma(T)$.

Exercice 9.13 Théorème du point fixe de Browder.

Soit C un convexe (non vide) fermé borné d'un espace de Hilbert séparable H. Soit $T : C \to C$ une application 1-lipschitzienne. On veut montrer que T admet un point fixe. on supposera (sans perte de généralité) que $0 \in C$.

a) Montrer que $T_n = (1 - 1/n)T$ admet un point fixe $x_n \in C$, pour tout entier $n \geq 1$.

b) Justifier qu'il existe (n_k) strictement croissante telle que x_{n_k} converge faiblement vers $x \in C$.

c) Montrer que pour tous entiers j, k,

$$\frac{{n_k}^2}{(n_k-1)^2}\|x_{n_k}\|^2 + \frac{{n_j}^2}{(n_j-1)^2}\|x_{n_j}\|^2 - \frac{2n_kn_j}{(n_k-1)(n_j-1)}Re(\langle x_{n_k}, x_{n_j}\rangle) \leq \|x_{n_k}\|^2 + \|x_{n_j}\|^2 - 2Re(\langle x_{n_k}, x_{n_j}\rangle).$$

d) En déduire que pour tout k, $\|x_{n_k}\|^2 \leq \dfrac{2n_k - 2}{2n_k - 1}Re(\langle x_{n_k}, x\rangle)$.

e) En déduire que x_{n_k} converge vers x en norme. Conclure.

Exercice 9.14 Soit $T(f)(x) = \int_0^1 \min(x,y)f(y)dy = \int_0^x yf(y)dy + x\int_x^1 f(y)dy$, vu comme opérateur sur E, où E est $C([0,1])$ ou $L^2([0,1])$.

1) Montrer que T est bien défini et continu de E dans E. Calculer sa norme quand $E = C([0,1])$.

2) Montrer que T est compact.

3) Déterminer le spectre de T.

4) Montrer que 0 n'est pas valeur propre:

a) par une méthode élémentaire pour $E = C([0,1])$.

b) en calculant les coefficients de Fourier de $T(f)$ en fonction de ceux de f dans le cas général.

5) Soit $U(f) = \int_0^x f(y)dy$ vu sur $L^2([0,1])$. Calculer U^* et en déduire $UU^* = T$

En déduire le rayon spectral de UU^* puis $\|U\|$ (on notera que $r(UU^*) = \|UU^*\| = \|U\|^2$).

10 Espaces de Sobolev

Exercice 10.1 Calculer la dérivée faible dans $L^p(]-1,1[)$ de la fonction $\varphi = Id_{]-1,1[}.\mathbb{1}_{[0,1[}$.

Exercice 10.2 (*Examen Juin 2001*)

1) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soit $1 < p < \infty$. Soit $f \in W^{1,p}(I)$. Montrer que si la dérivée faible f' de f possède elle-même une dérivée faible, alors f est dérivable au sens usuel, et que f' est la dérivée forte (càd la dérivée usuelle) de f (*on se rappellera le "théorème fondamental de l'Analyse" du DEUG*).

2) On considère maintenant $H_0^1(0,1)$. On le munit de la norme définie par $\|f\| = \|f'\|_{L^2}$ pour $f \in H_0^1(0,1)$.

a) Indiquer pourquoi cette norme est équivalente à la norme usuelle de $H_0^1(0,1)$.

b) Soit $J\colon H_0^1(0,1) \to L^2(0,1)$ l'injection canonique ($J(f) = f$). Montrer qu'elle est compacte.

c) En déduire qu'il existe $f_0 \in H_0^1(0,1)$ telle que $\|f_0'\|_{L^2} = 1$ et $\|f_0\|_{L^2} = \|J\|$ (*on démontrera d'abord que l'image d'une suite faiblement convergente par un opérateur compact converge en norme*).

d) On pose, pour φ de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact contenu dans $]0,1[$

$$F_\varphi(t) = \|J\|^2 \|f_0' + t\varphi'\|_{L^2}^2 - \|f_0 + t\varphi\|_{L^2}^2.$$

Montrer que $F_\varphi'(0) = 0$.

e) En déduire que f_0' a une dérivée faible f_0'' et que $f_0'' = -\|J\|^{-2} f_0$.

f) En utilisant la question 1), en déduire f_0 (on rappelle que $f_0(0) = f_0(1) = 0$), puis que $\|J\| = 1/\pi$.